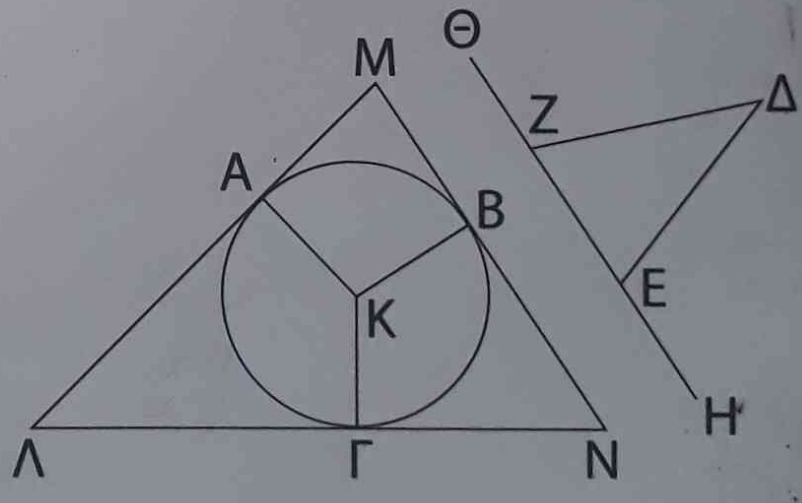
EUCLID

CƠ SỞ CỦA HÌNH HỌC



ZENBOOK
NHÀ XUẤT BẢN
TRI THỨC

Lớn lên từ *Cơ sở của hình học*, Toán học đã đi những bước rất xa. Bây giờ bạn có thể tìm được vô số sách toán với nhiều nội dung hơn, trình bày sáng sủa hơn sách của Euclid. Tuy vậy, tôi vẫn tin rằng người có học vẫn cần đọc Euclid vào một thời điểm nào đó trong cuộc đời mình, vẫn cần có *Cơ sở của hình học* đặt trên giá sách.

- GS. Ngô Bảo Châu

Cho đến nay, *Cơ sở của hình học* của Euclid là tác phẩm toán học kinh điển trứ danh nhất, và cũng chiếm lĩnh vị trí đặc biệt khi là quyển sách giáo khoa về toán học cổ nhất được sử dụng liên tục.

- GS. Richard Fitzpatrick

EUCLID

CƠ SỞ CỦA HÌNH HỌC

Quyển 1: Cơ sở hình học phẳng và đường thẳng
Quyển 2: Cơ sở của đại số hình học
Quyển 3: Cơ sở hình học phẳng về hình tròn
Quyển 4: Phép dựng các hình thẳng ở trong và xung quanh hình tròn
Quyển 5: Tỉ lệ thức
Quyển 6: Hình đồng dạng

Bản tiếng Anh được Richard Fitpatrick dịch từ bản tiếng Hy Lạp do J.K. Heiberg biên tập (năm 1883 -1885).

Nhóm dịch bản tiếng Việt:

Khởi xướng:

Đàm Thanh Sơn - Nguyễn Trí Dũng

Thực hiện:

Vũ Thái Hà - Nguyễn Hoàng Huy

Nguyễn An Khương - Phan Đình Phùng - Nguyễn Hữu Thọ

Lê Xuân Trường - Nguyễn Phương Văn

Với sự giúp đỡ của:

Ngô Bảo Châu - Đỗ Khánh Hoan - Đặng Thái Minh

Nguyễn Xuân Minh - Nguyễn Ngọc Tuân - Nguyễn Thành Trung

Nhà xuất bản Tri Thức và Zenbook trân trọng cảm ơn:
Giáo sư RICHARD FITZPATRICK đã cho phép sử dụng miễn phí bản tiếng Anh và Nhóm dịch bản tiếng Việt đã cho phép sử dụng miễn phí bản dịch tiếng Việt

Lời giới thiệu

của Giáo sư Ngô Bảo Châu cho bản dịch tiếng Việt

Euclid viết sách Cơ sở của hình học *ở Alexandria khoảng 300 năm trước Công nguyên. Đây là thời kỳ Hellenistic của triết học cổ đại, thời kỳ mà triết học cổ đại đã lan toả tới những vùng đất chịu ảnh hưởng của văn hoá Hy lạp mà tiêu biểu là thành Alexandria bên bờ Phi của Địa trung hải. Nét chung của triết học thời kỳ Hellenistic, phần nào thể hiện trong sách* Cơ sở của hình học, *là tư duy đã đạt đến mức tinh tuý, nhưng có lẽ đã mất đi tính bay bổng của thời kỳ trước Socrates và sức mạnh tư duy của Plato, Socrates.*

Người ta cho rằng hầu hết nội dung của sách Cơ sở của hình học *được truyền lại từ những tiền nhân như Pythagoras, Plato, Eudoxus … Tuy nhiên, khác với Pythagoras và Plato, Euclid loại bỏ triệt để các yếu tố siêu hình được gán cho các số và các hình. Các số hữu tỉ không còn được coi là minh chứng cho sự hài hoà của vũ trụ, các khối đều trong không gian không còn được coi là ý niệm toán học nấp đằng sau các phạm trù siêu hình như kim thuỷ hoả thổ… Hệ thống suy luận logic xuất phát từ hệ tiên đề của Plato*

được Euclid sử dụng một cách triệt để, các chỉ tiêu về tính chặt chẽ của chứng minh được áp dụng một cách không khoan nhượng. Theo một nghĩa nào đó, Cơ sở của hình học *là quyển sách thuần tuý toán học đầu tiên của nhân loại và là tờ giấy khai sinh ra toán học như một bộ môn độc lập, tuy vẫn còn là một bộ phận của triết học. Cách Euclid xây dựng một hệ thống kiến thức cao vút dựa trên số ít tiên đề nền và lấy luật logic làm chất gắn kết đã là hình mẫu cho sự phát triển của toán học cho đến ngày hôm nay.*

Trải qua 2400 năm, các mệnh đề phát biểu và chứng minh trong Cơ sở của hình học *vẫn còn tươi tắn một cách đáng ngạc nhiên. Từ hình học tam giác mà chúng ta học những năm cấp hai, cho đến chứng minh tuyệt đẹp bằng phản chứng cho sự tồn tại vô hạn những số nguyên tố, từ thuật toán Euclid tìm ước số chung lớn nhất mà chúng ta vẫn phải học trong giáo trình cơ sở toán học trong tin học, cho đến chứng minh không tồn tại khối đều nào khác ngoài năm khối đều của Platon, đều là những nội dung đã được triển khai một cách đầy đủ trong sách* Cơ sở của hình học.

Đấy có lẽ là những lý do tại sao Cơ sở của hình học *được coi là một trong những quyển sách có ảnh hưởng nhất tới sự phát triển của văn minh nhân loại. Sách đã được tái bản hàng ngàn lần, số lần tái bản có lẽ chỉ thua Kinh thánh. Từ thời kỳ phục hưng cho đến đầu thế kỷ hai mươi, sách của Euclid được coi là một trong những quyển sách mà những người có học phải đọc.*

Lớn lên từ Cơ sở của hình học, *Toán học đã đi những bước*

rất xa. Bây giờ bạn có thể tìm được vô số sách toán với nhiều nội dung hơn, trình bày sáng sủa hơn sách của Euclid. Tuy vậy, tôi vẫn tin rằng người có học vẫn cần đọc Euclid vào một thời điểm nào đó trong cuộc đời mình, vẫn cần có Cơ sở của hình học *đặt trên giá sách.*

Cảm ơn Nhà xuất bản Tri Thức và Nhóm dịch giả đã đem sách Cơ sở của hình học *của Euclid đến với độc giả Việt nam.*

Ngô Bảo Châu

TIỂU SỬ EUCLID[01]

Người ta không biết nhiều về cuộc đời của Euclid. Từ điển Tiểu sử Khoa học (Dictionary of Scientific Biography) mở đầu bài viết dài về Euclid bằng những lời này: "Mặc dù Euclid là nhà toán học trứ danh nhất mọi thời đại, là người mà tên tuổi đã đồng nghĩa với hình học cho đến tận thế kỷ 20, nhưng chỉ có hai sự kiện về cuộc đời ông được biết đến, mà ngay cả những sự kiện này cũng chưa phải là không còn tranh cãi". Những "sự kiện" này được suy diễn hay đồn đoán dựa vào việc tham khảo các tác phẩm cổ đại. Đầu tiên là ông sống ở thời sau Plato (mất vào năm 347 TCN) và trước Archimedes (sinh năm 287 TCN). Thứ đến là ông làm việc ở Alexandria.

Ông không phải là Euclid ở Megara, là một người bạn của Plato, là người vẫn bị nhầm với ông.

Heath[02] cho biết khả năng khả dĩ nhất là Euclid (tác giả của

---

01 Để độc giả có thêm thông tin về Euclid và di sản của ông, chúng tôi dịch nguyên văn phần tiểu sử của Euclid trong quyển sách Elements do Nhà xuất bản Green Lion Press ấn hành.

02 Sir Thomas Little Heath (1861 – 1940): tác giả, nhà toán học Anh, cũng là nhà nghiên cứu lịch sử toán học cổ đại; bản dịch quyển Elements của ông được Green Lion Press ấn hành.

Cơ sở của hình học) tiếp nhận giáo dục về toán tại Athen từ các học trò của Plato bởi vì hầu hết những nhà hình học có thể dạy ông đều xuất thân từ trường đó, và các nhà toán học mà Cơ sở của hình học của Euclid dựa vào đều sống và dạy ở Athen. Nếu chúng ta đồng ý với những điều này thì chúng ta xác định rằng Euclid sống sau năm 347 TCN.

Quan điểm cho rằng ông sinh trước Archimede là dựa vào một chỉ mục tham khảo dẫn đến tác phẩm Về hình cầu và hình trụ của Archimede. Tuy nhiên, chỉ mục tham khảo đó bây giờ đã bị cho là được chèn vào sau này.

Mặc dù vậy, một số người vẫn giữ quan điểm là chỉ có thể hơi chắc chắn rằng ông sống trước hoặc cùng thời với Appollonius (là người sống vào khoảng năm 200 TCN). Một chút bằng chứng cho chuyện này cũng là bằng chứng cho việc ông làm việc ở Alexandria là một tham khảo từ Pappus (khoảng năm 320 CN). Pappus nhận xét về Apollonius rằng Apollonius "sống khá lâu với các học trò của Euclid ở Alexandria, và nhờ thế mà ông có được thói quen tư quy khoa học như vậy". Nếu chúng ta tin Pappus trong chuyện này thì chúng ta phải đặt Euclid vào thời gian trước năm 200 TCN.

Heath cũng rút ra từ nhận xét của Pappus rằng Euclid dạy và mở một ngôi trường ở Alexandria. Tuy nhiên, những người khác phản bác rằng cho dù rõ ràng là ông có học trò ở Alexandria thì điều đó cũng không chứng minh được là ông làm việc ở đó.

Dù gì đi nữa, chính Apollinius đã tham khảo Euclid trong lời

giới thiệu của Quyển I bộ Các đường conic. Bởi vì Apollonious sinh vào khoảng năm 262 TCN cho nên Euclid sẽ phải sống trước 200 TCN.

Đấy là tất cả những gì chúng ta biết về cuộc đời của Euclid. Thế còn tác phẩm?

Heath trích Proclus (410-485 CN) như sau:

"Euclid đã biên soạn Cơ sở của hình học từ việc tập hợp các định lý của Euxodus, hoàn chỉnh nhiều định lý của Theaeterus, và cũng chứng minh một cách không thể chối cãi được những định lý vốn chỉ được chứng minh một cách lỏng lẻo bởi các bậc tiền bối".

Từ điển Tiểu sử Khoa học nói rằng:

"Danh tiếng lừng lẫy của Euclid nằm ở bộ Cơ sở của hình học, trong đó ông viết mười ba quyển và đã để lại một ảnh hưởng to lớn lên tư duy của con người mạnh mẽ hơn bất cứ tác phẩm nào khác ngoại trừ Kinh thánh. Bởi lý do đó, ông được biết đến trong thời cổ đại như là 'Người viết nên Cơ sở của hình học' và đôi khi chỉ đơn giản là "Nhà hình học". Đã từng có các Cơ sở của hình học được viết trước Euclid - đáng chú ý nhất là các tác phẩm của Hippocrates, Leo and Theudius ở Magnesia - nhưng tác phẩm của Euclid đã vượt qua chúng một cách ngoạn mục đến nỗi bây giờ chúng chỉ còn được biết đến qua các chỉ mục tham khảo của Eudemus's như là Proclus đã dẫn lại".

Nhiều tác phẩm khác được cho là của Euclid, trong thiên văn

học, quang học, lý thuyết âm nhạc, cũng như là trong toán học. Nhiều tác phẩm trong số đó đã không còn hiện hữu nữa, hoặc chỉ còn lại những mảnh vỡ. Sau Cơ sở của hình học, công trình toán học quan trọng nhất của ông vẫn còn giá trị là Dữ liệu (Data), là tác phẩm rõ ràng được viết ra như một công cụ để giải toán bằng phép phân tích. Quyển Về sự phân chia (của các số) - vẫn còn lưu truyền qua bản tiếng Ả rập - nói về việc phân chia các số thành các số khác không đồng dạng. Quyển Các hệ quả được cho là của Euclid đã bị mất, nhưng vẫn được biết đến thông qua các tác phẩm của Pappus. Nó bao gồm không phải là các hệ quả như trong Cơ sở của hình học, mà là, theo Heath, "các định lý về lý thuyết của các đường cát tuyến và hình học xạ ảnh hiện đại". Euclid cũng được cho là đã viết một chuyên luận về các mặt cắt với hình nón, dày bốn quyển, là tác phẩm đã vượt qua tác phẩm Các hình nón của Apollonius, vốn đã bị mất.

Hai tác phẩm quang học được cho là của Euclid, Quang học (Optics) và Phản xạ học (Catropics), đã mở ra truyền thống rất dài của môn quang hình học, duy trì cho đến tận đầu thế kỷ mười bảy. [...].

Những gì chúng ta biết về Eucid là biết qua tác phẩm sáng chói mà ông đã để lại. Quyển sách mà bạn đang cầm trên tay cho bạn cơ hội được nghiên cứu tác phẩm một cách trực tiếp và tự mình nghiền ngẫm xem vì sao "nhà toán học khả kính nhất của mọi thời đại" lại được vinh danh trong suốt hơn hai thiên niên kỷ.

Lời giới thiệu của Giáo sư Richard Fitzpatrick cho bản tiếng Anh

Cho đến nay, *Cơ sở của hình học* của Euclid là tác phẩm toán học kinh điển trứ danh nhất, và cũng chiếm đặc vị trí đặt biệt khi là quyển sách giáo khoa về toán học cổ nhất được sử dụng liên tục. Chúng ta không biết nhiều về tác giả, ngoài chuyện ông đã sống ở Alexandria vào khoảng năm 300 TCN. Các chủ đề chính của quyển sách bao gồm hình học, tỷ lệ thức và lý thuyết số. Hầu hết các định lý trong tác phẩm không phải là khám phá của cá nhân Euclid, mà là thành quả của các nhà toán học Hy Lạp trước đó như Pythagoras (và môn đệ của ông), Hippocrates ở Chios, Theaetetus ở Athens và Eudoxus ở Cnidos. Tuy nhiên, Euclid được ghi nhận công lao vì ông đã sắp xếp các định lý này theo một trật tự lô-gic (cho dù phải thú nhận rằng, không phải lúc nào cũng chặt chẽ như trong yêu cầu đối với toán học hiện đại), thể hiện

Euclid's Elements is by far the most famous mathematical work of classical antiquity, and also has the distinction of being the world's oldest continuously used mathematical textbook. Little is known about the author, beyond the fact that he lived in Alexandria around 300 BCE. The main subjects of the work are geometry, proportion, and number theory. Most of the theorems appearing in the Elements were not discovered by Euclid himself, but were the work of earlier Greek mathematicians such as Pythagoras (and his school), Hippocrates of Chios, Theaetetus of Athens, and Eudoxus of Cnidos. However, Euclid is generally credited with arranging these theorems in a logical manner, so as to demonstrate (admittedly, not always with the rigour demanded by modern mathematics) that they necessarily follow from five

1 Được sự đồng ý của Giáo sư Richard Fitzpatrick, là người thực hiện bản tiếng Anh mà chúng tôi dùng để dịch, chúng tôi đăng lại nguyên văn lời giới thiệu của ông để độc giả có thêm thông tin về tác phẩm. (ND)

rằng chúng được dẫn ra từ năm tiên đề đơn giản. Euclid cũng được đánh giá cao do đã đưa ra những chứng minh cụ thể tài tình cho những định lý[2] đã được khám phá trước đó: chẳng hạn như Định lý 48 ở Quyển 1. Các phép dựng hình được khai triển trong quyển sách chỉ giới hạn trong các thao tác thực hiện bằng thước thẳng và compa. Hơn thế nữa, các chứng minh thực nghiệm dựa vào đo đạc hoàn toàn không được sử dụng: tức là bất cứ sự so sánh nào giữa hai đại lượng chỉ được phép kết luận là chúng bằng nhau hoặc là đại lượng này lớn hơn đại lượng kia. *Cơ sở của hình học* gồm 13 quyển. Quyển 1 nêu các định lý căn bản của hình học phẳng, bao gồm ba định lý của tam giác đồng dạng, một số định lý liên quan đến đường thẳng song song, định lý về tổng các góc trong một tam giác, và định lý Pythagoras. Quyển 2 thường được cho là liên quan đến *hình học giải tích*, bởi hầu hết các định lý trong đó đều có một hệ quả đại số đơn giản. Quyển 3 nghiên cứu hình tròn và các tính chất của chúng, và bao gồm các định lý về đường tiếp tuyến

simple axioms. Euclid is also credited with devising a number of particularly ingenious proofs of previously discovered theorems: e.g., Theorem 48 in Book 1. The geometrical constructions employed in the Elements are restricted to those which can be achieved using a straight-rule and a compass. Furthermore, empirical proofs by means of measurement are strictly forbidden: i.e., any comparison of two magnitudes is restricted to saying that the magnitudes are either equal, or that one is greater than the other. The Elements consists of thirteen books. Book 1 outlines the fundamental propositions of plane geometry, including the three cases in which triangles are congruent, various theorems involving parallel lines, the theorem regarding the sum of the angles in a triangle, and the Pythagorean theorem. Book 2 is commonly said to deal with "geometric algebra", since most of the theorems contained within it have simple algebraic interpretations. Book 3 investigates circles and their properties, and includes theorems on tangents and inscribed

2 Trong bản tiếng Anh, ở nội dung chính, Richard Iitzpatrick dùng chữ proposition để gọi các định lý này, và chúng tôi dịch là Mệnh đề. (ND)

và góc nội tiếp. Quyển 4 nói về các đa giác thông thường nội tiếp, và ngoại tiếp, hình tròn. Quyển 5 xây dựng lý thuyết về tỷ lệ thức số học. Quyển 6 áp dụng lý thuyết tỷ lệ thức vào hình học phẳng, và bao gồm các định lý về các hình đồng dạng. Quyển 7 liên quan đến lý thuyết số căn bản: ví dụ như số nguyên tố, mẫu số chung lớn nhất v.v. Quyển 8 nói về cấp số nhân. Quyển 9 bao gồm các ứng dụng của hai quyển trước, và các định lý về sự vô hạn của các số nguyên tố. Quyển 10 phân lớp các đại lượng vô ước (tứ là vô tỉ) sử dụng phương pháp gọi là *phương pháp vét kiệt*, là tiền thân của phép tích phân.

Quyển 11 liên quan đến các định lý cơ bản của hình học không gian. Quyển 12 tính toán thể tích tương đối của hình nón, hình chóp, hình trụ và hình cầu sử dụng phương pháp vét kiệt. Cuối cùng, quyển 13 nghiên cứu năm khối đa diện đều Platon.

Ấn bản này trình bày nội dung tiếng Hy Lạp của tác phẩm - đã được J.L.Heiberg (1883-1885) biên tập - cùng với bản dịch sang tiếng Anh hiện

angles. Book 4 is concerned with regular polygons inscribed in, and circumscribed around, circles. Book 5 develops the arithmetic theory of proportion. Book 6 applies the theory of proportion to plane geometry, and contains theorems on similar figures. Book 7 deals with elementary number theory: e.g., prime numbers, greatest common denominators, etc. Book 8 is concerned with geometric series. Book 9 contains various applications of results in the previous two books, and includes theorems on the infinitude of prime numbers, as well as the sum of a geometric series. Book 10 attempts to classify incommensurable (i.e., irrational) magnitudes using the so-called "method of exhaustion", an ancient precursor to integration. Book 11 deals with the fundamental propositions of three-dimensional geometry. Book 12 calculates the relative volumes of cones, pyramids, cylinders, and spheres using the method of exhaustion. Finally, Book 13 investigates the five so-called Platonic solids.

03 Do điều kiện xuất bản lần này, chúng tôi chỉ giới thiệu nội dung của các quyển từ 1 đến 6 trong bản dịch tiếng Việt. Chúng tôi hy vọng sẽ có điều kiện thực hiện và giới thiệu tiếp các quyển còn lại đến độc giả Việt Nam trong tương lai gần. (ND)

đại, và mục lục từ vựng Hy Lạp - Anh. Các quyển 14 và 15 giả mạo, và các bình giải, vốn được thêm vào trong nhiều thế kỷ qua, sẽ không có trong ấn bản này. Mục đích của bản dịch là làm cho các luận điểm sáng sủa và mạch lạc hơn, trong khi vẫn bám sát ý của bản gốc tiếng Hy Lạp. Các nội dung đặt trong ngoặc vuông (cả trong phần tiếng Hy Lạp và tiếng Anh) là của Heiberg, được suy ra từ văn bản gốc (một số quá rõ ràng hoặc không hữu dụng đã được bỏ đi). Nội dung để trong ngoặc đơn (phần tếng Anh) là nội dung ngụ ý nhưng không viết ra trong phần tiếng Hy Lạp. Xin cám ơn Mariusz Wodzicki (Berkeley) đã cố vấn sắp chữ, Sam Watson & Jonathan Fenno (U. Mississippi) và Gregory Wong (UCSD) đã chỉ ra nhiều sai sót khi thực hiện Quyển 1.

This edition of Euclid's Elements presents the definitive Greek text—i.e., that edited by J.L. Heiberg (1883–1885)—accompanied by a modern English translation, as well as a Greek-English lexicon. Neither the spurious books 14 and 15, nor the extensive scholia which have been added to the Elements over the centuries, are included. The aim of the translation is to make the mathematical argument as clear and unambiguous as possible, whilst still adhering closely to the meaning of the original Greek. Text within square parenthesis (in both Greek and English) indicates material identified by Heiberg as being later interpolations to the original text (some particularly obvious or unhelpful interpolations have been omitted altogether). Text within round parenthesis (in English) indicates material which is implied, but not actually present, in the Greek text. My thanks to Mariusz Wodzicki (Berkeley) for typesetting advice, and to Sam Watson & Jonathan Fenno (U. Mississippi), and Gregory Wong (UCSD) for pointing out a number of errors in Book 1.

BẢNG TỪ VIẾT TẮT VÀ QUY ƯỚC[01]

Viết tắt	Tiếng Việt	Tiếng Anh
ĐN	Định nghĩa	Definition
ĐĐ	Định đề	Postulate
TĐ	Tiên đề	Common Notion
MĐ	Mệnh đề	Proposition
HQ	Hệ quả	Corollary

Quy ước khi có tham chiếu đến các nội dung liên quan:

[ĐN. X.Y] = Theo Định nghĩa đánh số Y trong Quyển X

[ĐĐ. X] = Theo Định đề đánh số X (Chỉ có trong Quyển 1)

[TĐ. X] = Theo Tiên đề đánh số X (Chỉ có trong Quyển 1)

[MĐ. X.Y] = Theo Mệnh đề đánh số Y trong Quyển X

[HQ. MĐ X.Y] = Theo Hệ quả của Mệnh đề Y trong Quyển X

---

01 Đây là nội dung do Nhóm dịch đưa vào để độc giả tiện theo dõi và thống nhất cách trình bày. (ND)

QUYỂN 1

Cơ sở của Hình học phẳng và Đường thẳng[01]

01 Bản gốc tiếng Hy Lạp của Euclid không đặt tên riêng cho từng quyển. Đây là tên Quyển 1 trong bản tiếng Anh của Richard Fitzpatrick, tương tự ở các quyển khác: tên đều do Richard Fitzpatrick đặt. Lưu ý, các chú thích có đánh dấu (ND) ở cuối cùng là của Nhóm dịch; các chú thích khác là của Richard Fitzpatrick. (ND)

Định nghĩa

1. Điểm là cái không [thể] chia nhỏ.

2. Đường là một lượng dài không có chiều rộng.

3. Tận cùng của một đường là điểm.

4. Một đường thẳng là một đường (bất kỳ) mà trên đó các điểm nằm ngang bằng.

5. Mặt là cái chỉ có chiều dài và chiều rộng.

6. Tận cùng của một mặt là [các] đường.

7. Mặt phẳng là một mặt (bất kỳ) mà trên đó các đường thẳng nằm ngang bằng.

8. Góc phẳng là độ nghiêng của [các] đường so với một đường khác, khi hai đường trên một mặt phẳng gặp cắt nhau, và [hai đường này] không nằm trên một đường thẳng.

9. Và khi hai đường tạo góc đều là đường thẳng, thì góc được gọi là góc thẳng.

10. Khi một đường thẳng đứng trên một đường thẳng khác tạo thành hai góc kề bằng nhau, mỗi góc đó là một góc vuông, và đường thẳng đang xét được gọi là vuông góc với đường mà nó đứng trên.

11. Góc tù là góc lớn hơn góc vuông.

12. Góc nhọn là góc nhỏ hơn góc vuông.

13. Biên là chỗ tận cùng của một cái gì đó.

14. Hình là cái được tạo thành bởi một vài hoặc nhiều biên.

15. Hình tròn là một hình phẳng được tạo thành bởi một đường đơn [được gọi là chu vi] sao cho mọi đoạn thẳng tỏa ra [đến chu vi] từ một điểm trong số các điểm nằm bên trong hình tròn là bằng nhau

16. Và điểm đó được gọi là tâm của hình tròn.

17. Còn đường kính của hình tròn là một đoạn thẳng bất kì được kẻ xuyên qua tâm và bị chu vi của hình tròn ngắt đứt. Mỗi đoạn thẳng như thế đều cắt đôi hình tròn.[02]

18. Một nửa hình tròn là hình được giới hạn bởi đường kính và một phần đường chu vi bị cắt ra bởi đường kính này. Tâm của nửa hình tròn cũng chính là tâm của hình tròn.

19. Hình thẳng là những hình được giới hạn bởi các đoạn thẳng: hình ba cạnh (tam giác) là những hình được giới hạn bởi ba đoạn thẳng, hình bốn cạnh (tứ giác) được giới hạn bởi bốn đoạn thẳng, và hình nhiều cạnh (đa giác) thì

02 Phát biểu này nên được xem là định đề hơn là đưa vào phần định nghĩa. (ND)

được giới hạn bởi nhiều hơn bốn đoạn thẳng.

20. Đối với hình tam giác (hình ba cạnh): một tam giác là tam giác đều khi có ba cạnh bằng nhau, là tam giác cân nếu chỉ có hai cạnh bằng nhau, và là tam giác lệch nếu có ba cạnh không bằng nhau.

21. Hình ba cạnh khác: là tam giác vuông nếu có một góc vuông, là tam giác tù nếu có một góc tù và là nhọn nếu cả ba góc đều là góc nhọn.

22. Đối với hình bốn cạnh (tứ giác): hình vuông là hình các cạnh vuông góc và bằng nhau, là hình chữ nhật nếu các cạnh vuông góc nhưng không bằng nhau, là hình thoi nếu các cạnh bằng nhau nhưng không vuông góc, và là hình chữ nhật lệch (hình bình hành) nếu chỉ có các cạnh đối bằng nhau và góc đối bằng nhau nhưng không vuông góc. Và gọi những hình tứ giác không cùng loại với những hình vừa kể trên là hình thang.

23. Các đường thẳng song song là những đường nằm cùng mặt phẳng và khi kéo dài ra vô hạn ở cả hai hướng thì không gặp nhau (ở cả hai hướng).

Các Định đề[03]

1. Cùng quy ước rằng có thể vẽ một đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ.

2. Và có thể kéo dài liên tục một đoạn thẳng thành đường thẳng.

3. Có thể vẽ một hình tròn với tâm và bán kính bất kỳ.

4. Tất cả các góc vuông đều bằng nhau.

5. Nếu một đường thẳng (gốc) cắt hai đường thẳng khác tạo thành các góc trong về cùng một phía [với nó] có tổng nhỏ hơn hai góc vuông, thì hai đường thẳng (bị cắt) khi được kéo dài ra vô hạn sẽ cắt nhau ở phía của đường thẳng gốc mà tổng hai góc trong nhỏ hơn hai vuông (chứ không cắt ở phía bên kia).[04]

---

03 Từ tiếng Hy Lạp c ổ Αἰτήματα. thường được dịch qua tiếng Anh là *postulate*. Ở dạng động từ, ở ngữ cảnh cụ thể này, từ này có nghĩa *quy định, quy ước* trước khi cùng thảo luận tiếp. Ở Việt Nam chúng ta đã quen thuộc với từ Định đề, được dùng để nói đến các *quy định* này của Euclid. (ND)

04 Định đề này hiệu dụng khi chúng ta giải quyết các vấn đề của hình học *phẳng*.

Các Tiên đề[05]

1. Những thứ cùng bằng với một thứ thì bằng nhau.

2. Nếu cùng thêm những thứ bằng nhau vào những thứ bằng nhau (khác) thì những tổng thể sẽ bằng nhau.

3. Nếu cùng bớt những thứ bằng nhau khỏi những thứ bằng nhau khác thì phần còn lại sẽ bằng nhau.[06]

4. Các thứ trùng nhau thì bằng nhau.

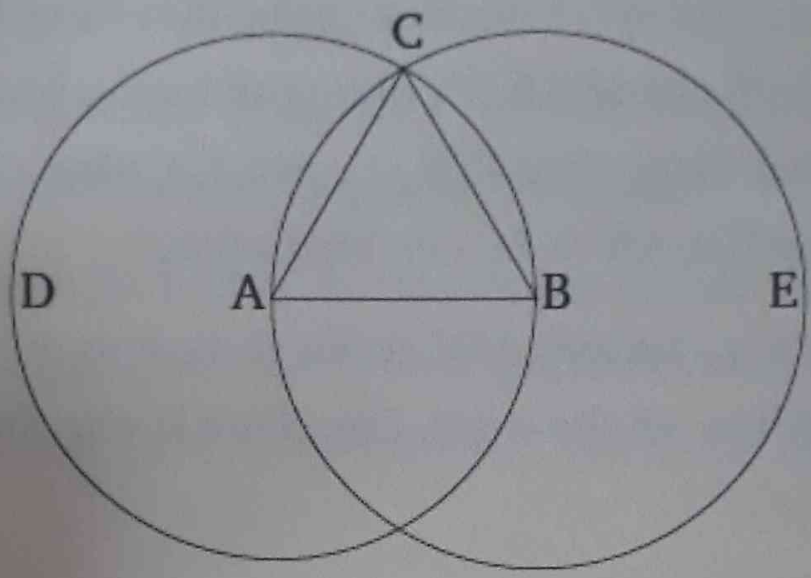
5. Một tổng thể thì lớn hơn bộ phận lẻ của nó.

---

05 Từ Κοιναὶ ἔννοιαι.3 bản tiếng Anh được dịch là *Common Notion*. Đây là các khái niệm chung cần được đồng ý *trước khi bắt đầu* thảo luận. Ở Việt Nam chúng ta đã quen thuộc với từ Tiên đề khi nói đến các *khái niệm chung* này của Euclid. (ND)

06 Là một phần mở rộng dễ thấy của Tiên đề. 2 và 3: nếu những thứ bằng nhau được thêm vào hay lấy ra khỏi hai vế của một bất đẳng thức thì bất đẳng thức vẫn giữ nguyên [không đổi dấu].

Mệnh đề[07] **1: Dựng một tam giác đều từ một đoạn thẳng cho trước.**



Gọi AB là đoạn thẳng đã cho.

Như vậy ta cần dựng tam giác đều dựa trên đoạn thẳng AB.

Vẽ hình tròn BCD với tâm A, bán kính AB [ĐĐ. 3], tiếp tục vẽ hình tròn ACE tâm B bán kính BA [ĐĐ.3]. Gọi CA và CB lần lượt là các đoạn thẳng được nối từ điểm C, nơi hai hình tròn cắt nhau[08] tới A và B [ĐĐ. 1].

---

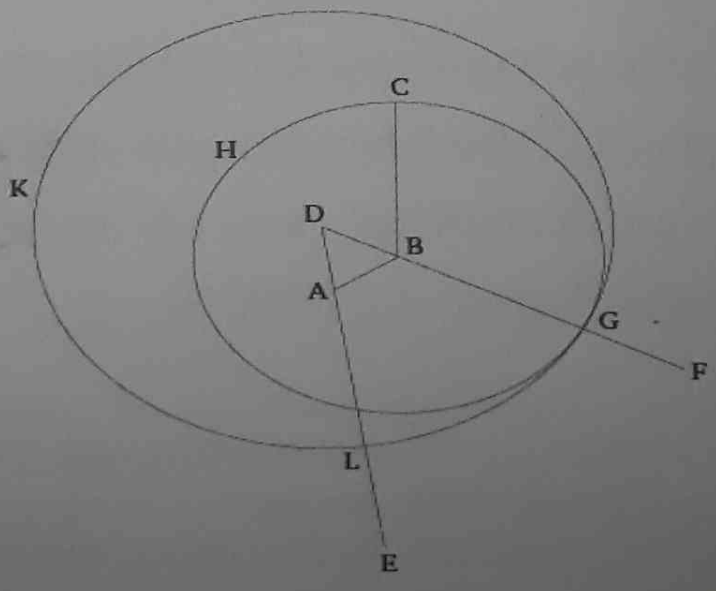
07 Nguyên văn tiếng Anh là *proposition*, trong ngữ cảnh này có nghĩa là những yêu cầu (có tính mệnh lệnh) cần phải làm (chứng minh). Ở Việt Nam chúng ta đã quen thuộc với từ Mệnh đề, để nói đến các *yêu cầu* này của Euclid. (ND)

08 Giả định các đường tròn thực sự cắt nhau cũng cần được coi là một Định đề bổ sung. Cũng có một giả định ngầm khác, đó là hai đoạn thẳng không thể cùng trương một cung (của hình tròn). (ND)

Vì A là tâm của hình tròn CDB, ta có AC bằng AB [ĐN. 1.15]. Tương tự, BC bằng BA vì B là tâm của hình tròn CAE [ĐN. 1.15]. Nhưng CA đã được chứng tỏ là bằng AB. Do đó, CA và CB đều bằng AB. Và những thứ cùng bằng với một thứ thì phải bằng nhau [TĐ. 1], nên CA bằng CB. Vậy ba đoạn thẳng CA, AB và BC đều bằng nhau.

Như vậy, tam giác ABC là đều và đã được dựng từ đoạn thẳng hữu hạn AB cho trước. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 2</u>[09]: Dựng một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng cho trước từ một điểm mút cho trước.



09 Mệnh đề này thừa nhận một số trường hợp khác, tùy theo vị trí tương đối của điểm A và đường BC. Trong những trường hợp như thế này, Euclid chỉ luôn xét một trường hợp cụ thể, thường là trường hợp khó nhất, và để các trường hợp còn lại cho bạn đọc làm bài tập.

Gọi A là điểm cho trước, BC là đoạn thẳng cho trước. Yêu cầu dựng đoạn thẳng xuất phát từ A và bằng với đoạn BC đã cho.

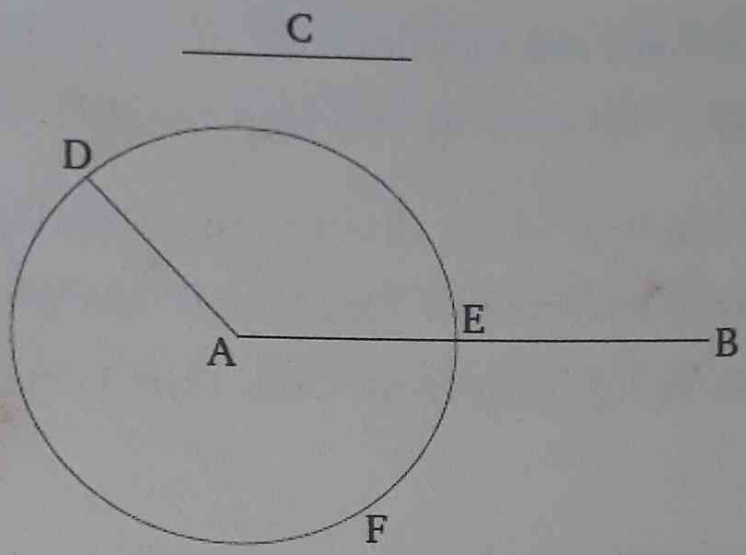
Gọi AB là đoạn thẳng được nối từ A tới B [ĐĐ. 1] và tam giác đều DAB được dựng dựa trên nó [MĐ. 1.1].

AE và BF lần lượt là các đoạn thẳng kéo dài của DA và DB [ĐĐ. 2]. Dựng hình tròn CGH tâm B bán kính BC [ĐĐ. 3], một lần nữa dựng hình tròn GKL tâm D bán kính DG [ĐĐ. 3].

Theo đó, vì B là tâm hình tròn CGH nên BC bằng BG [ĐN. 1.15]. Tương tự, D là tâm hình tròn GKL nên DL bằng DG [ĐN. 1.15]. Và trong phạm vi đó, DA bằng DB. Vậy các phần còn lại AL và BG bằng nhau [TĐ. 3]. Nhưng BC đã [được chứng tỏ] bằng BG. Do đó, AL và BC đều bằng BG. Do những gì cùng bằng với một thứ thì bằng nhau [TĐ. 1], nên AL cũng bằng BC.

Như vậy, đoạn thẳng AL bằng với đoạn BC cho trước đã được dựng tại điểm A cho trước. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 3:</u> Cho trước hai đoạn thẳng không bằng nhau, từ đoạn dài hơn hãy cắt ra một đoạn thẳng bằng với đoạn ngắn hơn.



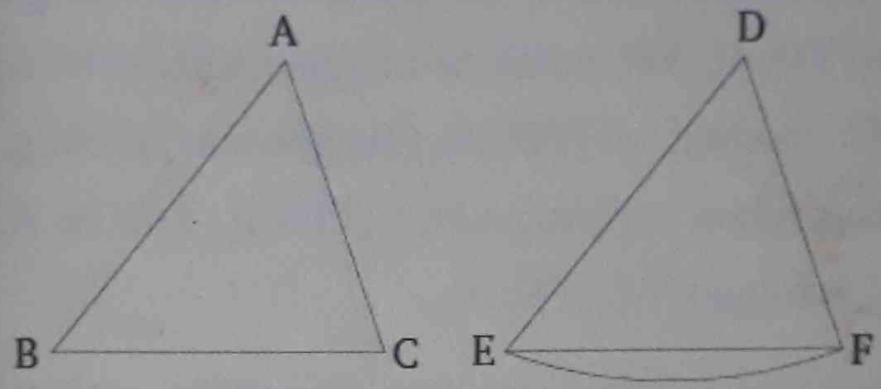
Gọi AB và C là hai đoạn thẳng không bằng nhau cho trước, với AB là đoạn dài hơn. Yêu cầu cắt ra từ AB một đoạn thẳng bằng với C.

Dựng tại A một đoạn AD bằng với C[MĐ. 1.2]. Vẽ hình tròn DEF có tâm A và bán kính AD [ĐĐ. 3].

Vì A là tâm của hình tròn DEF nên AE bằng AD [ĐN. 1.15]. Nhưng vì C cũng bằng AD. Nghĩa là AE và C cùng bằng với AD. Và do đó AE cũng bằng C [TĐ. 1].

Như vậy, với hai đoạn thẳng AB và C cho trước, đoạn AE, bằng với đoạn thẳng C ngắn hơn, đã được cắt ra từ đoạn thẳng AB dài hơn. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

Mệnh đề 4: Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, và góc xen giữa hai cạnh bằng nhau, thì hai tam giác cũng sẽ có cạnh đáy này bằng cạnh đáy kia, tam giác này sẽ bằng tam giác kia, và các góc còn lại bị chắn bởi các cạnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.



Gọi ABC và DEF là hai tam giác với hai cạnh AB và AC tương ứng bằng với DE và DF. Tức là, AB bằng DE, AC bằng DF. Đặt góc BAC bằng góc EDF. Có thể phát biểu rằng cạnh đáy BC bằng cạnh đáy EF, tam giác ABC sẽ bằng tam giác DEF, và các góc còn lại bị chắn bởi các cạnh tương ứng nhau thì bằng nhau. Tức là ABC bằng DEF, ACB bằng DFE.

Bởi vì nếu tam giác ABC được xếp chồng lên tam giác DEF[10] điểm A được đặt lên trên lên điểm D, đoạn thẳng AB trên DE, thì điểm B cũng sẽ trùng với điểm E vì AB đã trùng với DE. Do đó, từ AB trùng với DE, và hơn nữa góc BAC

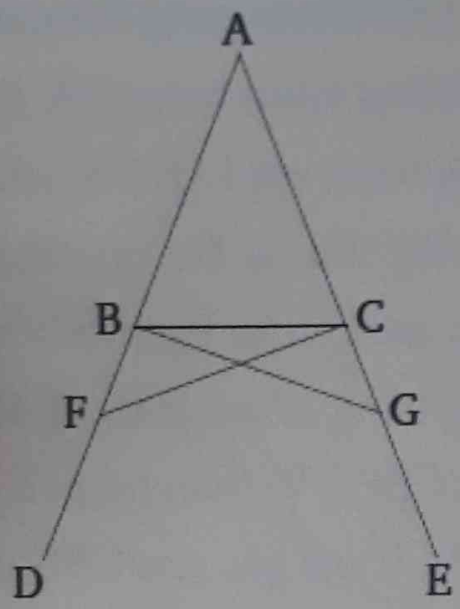
10 Cách so sánh hình với hình cũng nên coi như một định đề bổ sung.

bằng góc EDF, ta sẽ có đoạn thẳng AC cũng bằng DF. Thêm nữa, vì AC bằng DF, điểm C cũng sẽ trùng với điểm F. Nhưng rõ ràng là B trùng với E, đáy BC thì sẽ trùng với đáy EF. Vì nếu B trùng với E, C trùng với F, mà đáy BC không trùng EF, thì hai đoạn thẳng này sẽ tạo thành hình có kích thước. Điều này là không thể [ĐĐ. 1][11]. Đáy BC do đó sẽ trùng với EF, và bằng nó [TĐ. 4]. Kết quả là cả tam giác ABC sẽ trùng với tam giác DEF, và bằng nó [TĐ. 4]. Các góc còn lại cũng sẽ tương ứng trùng nhau, và bằng nhau [TĐ. 4]. Tức là, ABC bằng DEF, ACB bằng DFE [TĐ. 4].

Như vậy, nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, và góc xen giữa chúng bằng nhau, thì thì cạnh đáy cũng bằng với cạnh đáy, tam giác này sẽ bằng tam giác kia, và các góc còn lại bị chắn bởi các cạnh tương ứng bằng nhau cũng bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

11 Do Định đề 1 đã ngầm giả định chỉ có một đường thẳng nối hai điểm cho trước.

<u>Mệnh đề 5:</u> Với các tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau, và nếu hai cạnh bằng nhau được kéo dài sẽ tạo ra hai góc phía dưới cạnh đáy cũng bằng nhau.



Gọi ABC là tam giác cân có cạnh AB bằng cạnh AC, BD và CE lần lượt là các đoạn thẳng được kéo dài của AB và AC [ĐĐ. 2] Có thể phát biểu rằng góc ABC bằng góc ACB, góc CBD bằng BCE.

Chọn điểm F tùy ý trên BD, và gọi AG là đoạn được cắt từ đoạn lớn hơn AE và bằng AF [MĐ. 1.3]. Kẻ đoạn thẳng nối FC và GB [TĐ. 1].

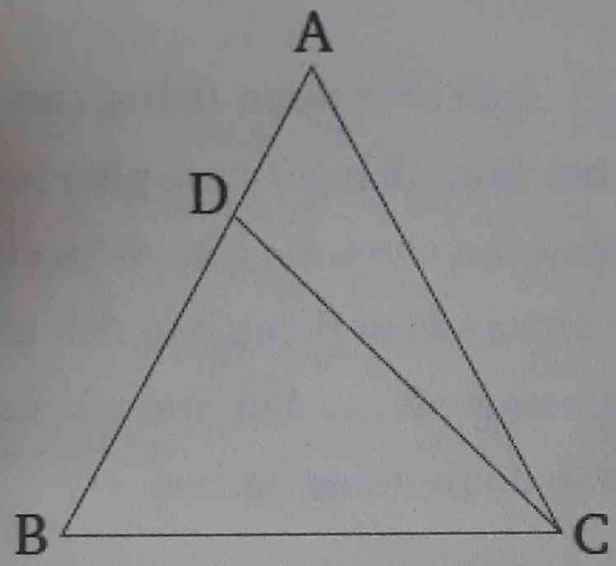
Thực tế, vì AF bằng AG, AB bằng AC, nên FA và AC lần lượt bằng GA và AB. Chúng cũng cùng chứa chung góc FAG. Do đó, đáy FC bằng đáy BG, tam giác AFC bằng tam giác AGB, và các góc còn lại bị chắn bởi các cạnh tương ứng

bằng nhau thì cũng bằng nhau [MĐ. 1.4]. Tức là, ACF bằng ABG, AFC bằng AGB. Và vì toàn bộ đoạn AF bằng toàn bộ đoạn AG, mà trong nó đoạn nhỏ AB bằng đoạn nhỏ AC nên phần còn BF và CG do đó cũng bằng nhau [TĐ. 3]. Nhưng FC cũng được chứng minh bằng GB. Do đó hai đoạn thẳng BF, FC tương ứng bằng với CG, GB; góc BFC bằng góc CGB với BC là cạnh đáy chung. Do đó, tam giác BFC bằng tam giác CGB, và các góc còn lại bị chắn bởi các cạnh tương ứng bằng nhau cũng bằng nhau [MĐ. 1.4]. Tức là, FBC bằng GCB, BCF bằng CBG. Vì toàn bộ góc ABG đã được chứng minh bằng góc ACF, các góc con CBG, BCF của chúng bằng nhau, các góc còn lại ABC và ACB do đó cũng bằng nhau [TĐ. 3]. Đây là các góc tại đáy của tam giác ABC. Điều đó cũng chứng tỏ rằng hai góc FBC, GCB bằng nhau và lại là hai góc nằm dưới cạnh đáy.

Như vậy, trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau, và nếu hai cạnh bằng nhau được kéo dài thì các góc nằm dưới đáy sẽ bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 6:</u> Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì thì các cạnh chắn chúng cũng bằng nhau.

Gọi ABC là tam giác với góc ABC bằng góc ACB. Có thể phát biểu rằng cạnh AB bằng cạnh AC.



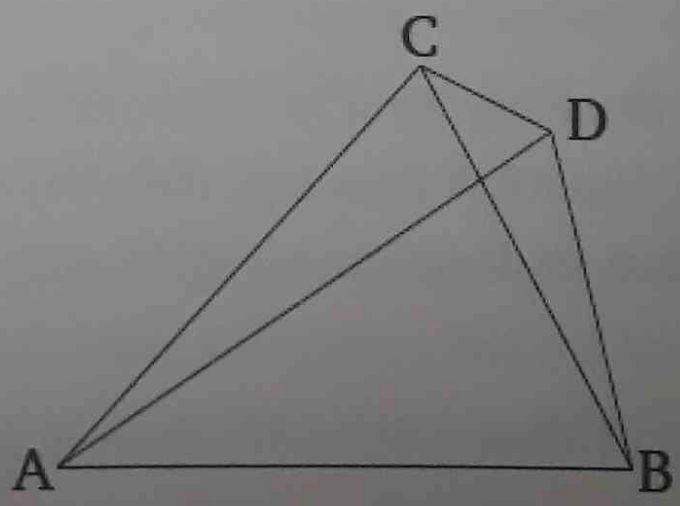
Vì nếu AB không bằng AC, thì một trong chúng là đoạn lớn hơn. Gọi AB là đoạn lớn. Đặt DB bằng với AC là đoạn được cắt ra từ đoạn lớn AB [MĐ. 1.3]. Nối D với C [ĐĐ. 1].

Theo đó, từ DB bằng AC và BC chung, hai cạnh DB, BC tương ứng bằng với AC, CB, góc DBC cũng bằng góc ACB. Như vậy đáy DC bằng đáy AB, và tam giác DBC sẽ bằng tam giác ACB [MĐ. 1.4], cái nhỏ bằng cái lớn hơn. Điều này vô lý [TĐ. 5]. Như vậy AB không thể không bằng AC, và do đó

nó bằng AC.[12]

Như vậy, nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì các cạnh đối diện với chúng cũng bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh

<u>Mệnh đề 7:</u> Trên một đoạn thẳng cho trước, không thể dựng được hai đoạn thẳng ở cùng phía tương ứng bằng với hai đoạn thẳng cho trước mà giao điểm của chúng khác với giao điểm của hai đoạn thẳng ban đầu khi mà các đầu mút của chúng trùng với các đầu mút của hai đoạn thẳng ban đầu nằm trên đoạn thẳng đã cho.



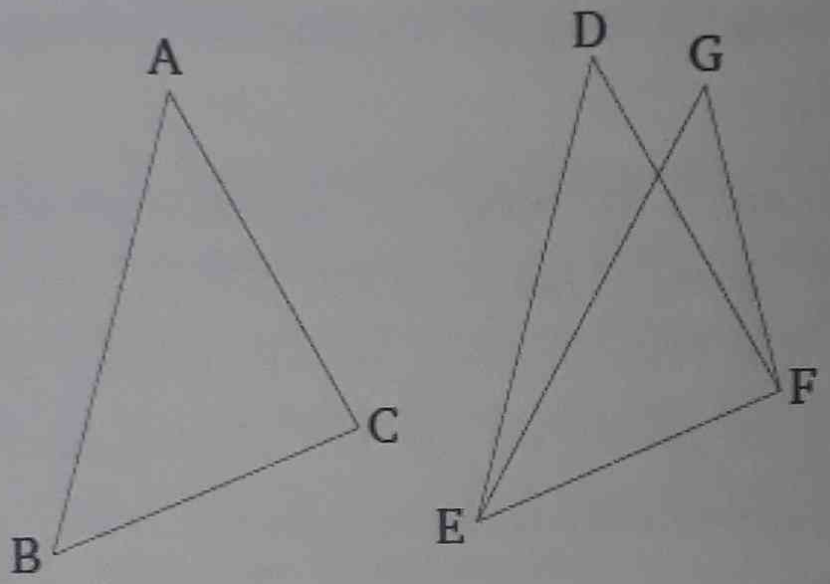
12 Ở đây đã dùng một tiên đề không được đề cập trước rằng nếu hai lượng không thể không bằng nhau (are not unequal) thì thì chúng phải bằng nhau. Về sau này trong cách sử dụng đã được chuyển thành một dạng tiên đề khác khá gần gũi với nó là: nếu hai lượng lần lượt không lớn hơn hay nhỏ hơn nhau thì chúng phải bằng nhau.

Giả sử, cho AC, CB lần lượt bằng hai đoạn thẳng AD, DB, cùng được dựng trên đoạn thẳng AB, nhưng cắt nhau tại hai điểm C, D khác nhau ở cùng phía đối với AB, và có chung các điểm đầu mút (trên AB). Vậy CA bằng DA với đầu mút A chung, CB bằng DB với đầu mút B chung. Nối C với D [ĐĐ. 1].

Theo đó, vì AC bằng AD, góc ACD cũng bằng ADC [MĐ. 1.5]. Vậy ADC lớn hơn DCB [TĐ. 5]. Tương tự, CDB lớn hơn DCB [TĐ. 5]. Cũng vậy, vì CB bằng DB, nên góc CDB bằng với góc DCB [MĐ. 1.5]. Nhưng đã chứng minh được rằng góc đầu tiên là lớn hơn góc kia. Điều này là không thể xảy ra.

Như vậy, trên một đoạn thẳng cho trước, không thể dựng được hai đoạn thẳng ở cùng phía tương ứng bằng với hai đoạn thẳng cho trước mà giao điểm của chúng khác với giao điểm của hai đoạn thẳng ban đầu khi mà các đầu mút của chúng trùng với các đầu mút của hai đoạn thẳng ban đầu nằm trên đoạn thẳng đã cho. Đây chính là điều phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 8:</u> Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, và hai cạnh đáy cũng bằng nhau, thì các góc xen giữa các cặp cạnh tương ứng bằng nhau là bằng nhau.



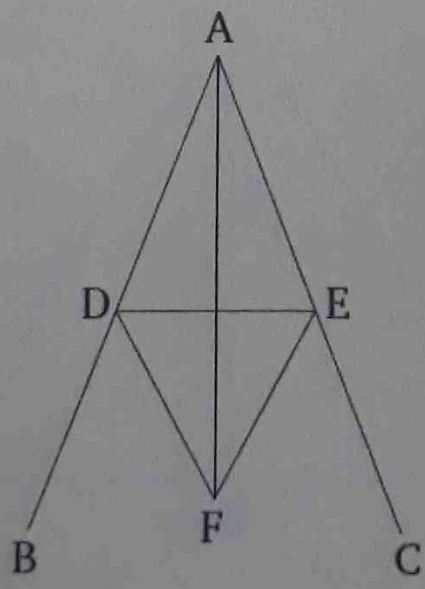
Gọi ABC và DEF là hai tam giác với hai cạnh AB và AC lần lượt bằng DE và DF. Tức là, AB bằng DE, AC bằng DF. Đồng thời cho đáy BC bằng đáy EF. Có thể phát biểu rằng tam giác BAC cũng bằng tam giác EDF.

Vì nếu tam giác ABC được đặt chồng lên tam giác DEF, điểm B trên điểm E, đoạn BC trên EF, thì điểm C cũng trùng với điểm F bởi vì BC bằng EF. Và từ BC bằng EF, nên BA và CA cũng sẽ tương ứng trùng với ED và DF. Vì nếu BC trùng với EF nhưng BA và CA tương ứng không trùng với ED và DF, mà nằm lệch ra ngoài giống như EG và GF ở hình trên, thì trên cùng một đoạn thẳng cho trước ta sẽ dựng được hai

đoạn thẳng tương ứng bằng với hai đoạn đã cho và cắt nhau tại một điểm khác (với giao điểm hai đoạn kia) ở về cùng phía đoạn thẳng ban đầu, nhưng đồng thời lại có chung hai đầu mút với hai đoạn đã cho. Nhưng các đoạn thẳng như thế không thể dựng được [MĐ. 1.7]. Cho nên như vậy thì khi đáy BC được đồng nhất với đáy EF, các cạnh BA và AC không thể không trùng với ED và DF một cách tương ứng. Tức là chúng trùng nhau. Như vậy, góc BAC sẽ trùng với góc EDF, và bằng với góc này [TĐ. 4].

Như vậy, nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, và cạnh đáy cũng bằng nhau, thì các góc xen giữa cặp cạnh tương ứng bằng nhau là bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 9:</u> Chia đôi một góc thẳng cho trước.



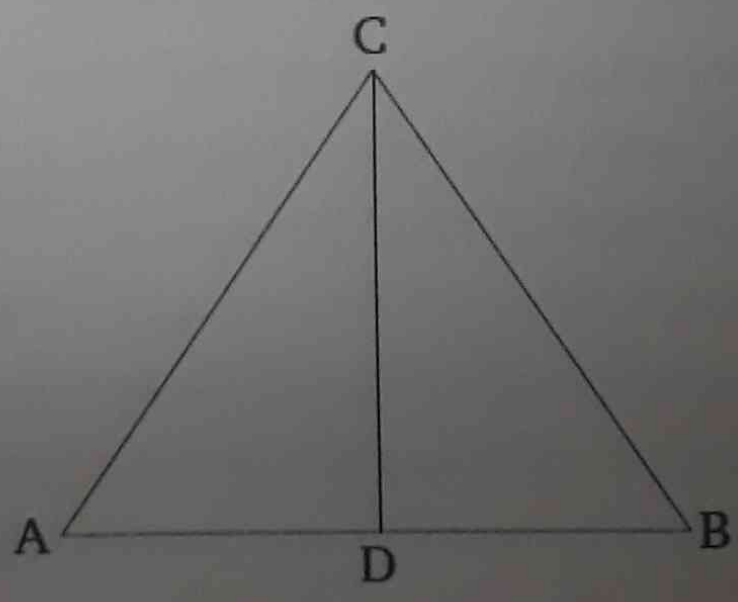
Gọi ABC là góc thẳng cho trước. Yêu cầu chia đôi góc này.

Gọi D là điểm được chọn ngẫu nhiên trên AB, và cắt từ đoạn AC ra đoạn AE sao cho AE bằng với AD [MĐ. 1.3], rồi nối D với E. Dựng tam giác đều DEF trên cạnh DE [MĐ. 1.1], và nối A với F. Có thể phát biểu rằng góc BAC được chia đôi bởi đường AF.

Vì AD bằng AE, và AF là cạnh chung, hai đoạn thẳng DA, AF lần lượt bằng với EA, AF. Và đáy DF bằng đáy EF. Do đó, góc DAF bằng góc EAF [MĐ. 1.8].

Như vậy, góc thẳng BAC đã được chia đôi bởi đường AF. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 10:</u> Chia đôi một đoạn thẳng cho trước.



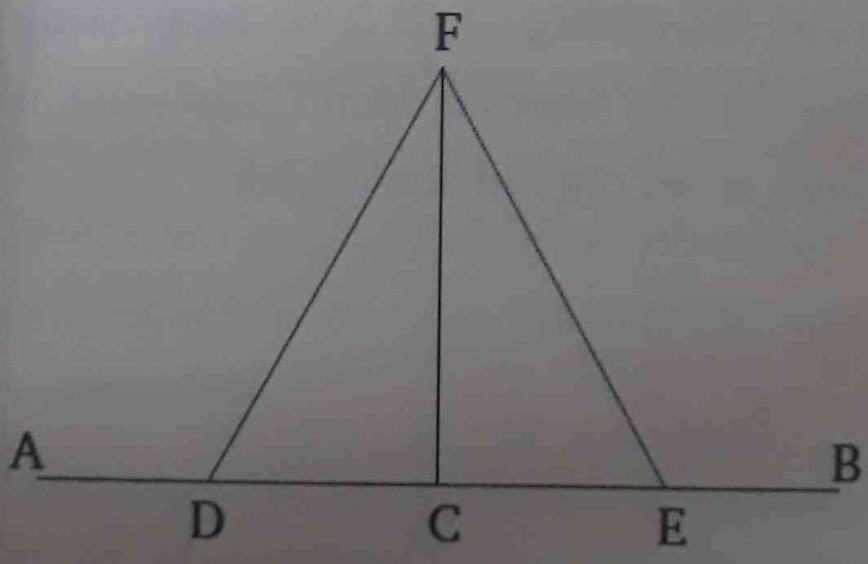
Gọi AB là đoạn thẳng cho trước. Yêu cầu chia đôi đoạn thẳng AB này.

Trên đoạn AB, dựng tam giác đều ABC [MĐ. 1.1]. Chia đôi góc ACB bởi đoạn thẳng CD [MĐ. 1.9]. Có thể phát biểu rằng đoạn thẳng AB được chia đôi tại điểm D.

Vì AC bằng CB và có CD chung, hai đoạn thẳng AC, CD tương ứng bằng với BC, CD. Và góc ACD bằng với góc BCD. Do đó, đáy AD bằng đáy BD [MĐ. 1.4]

Như vậy, đoạn thẳng AB đã được chia đôi tại điểm D. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 11:</u> Từ một điểm cho trước nằm trên một đường thẳng cho trước, hãy dựng một đoạn thẳng vuông góc với đường thẳng cho trước này.



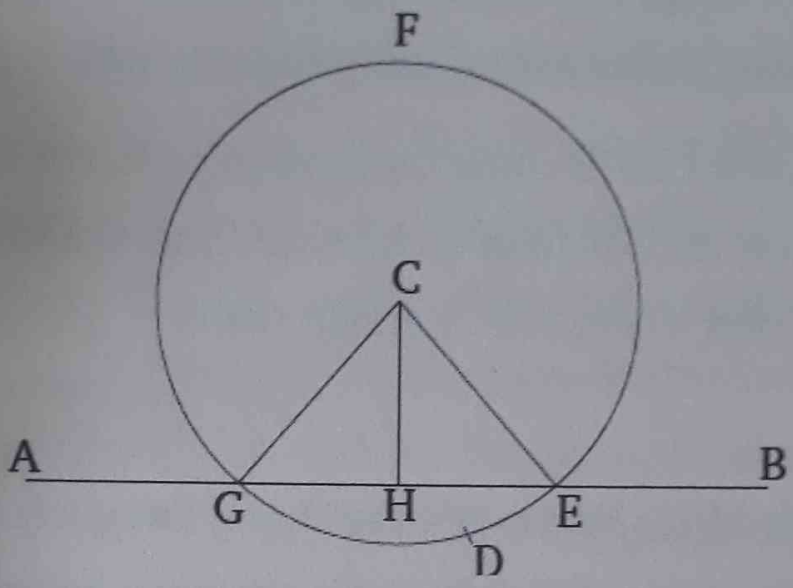
Gọi AB là đường thẳng cho trước, và C là điểm cho trước nằm trên nó. Yêu cầu dựng một đường thẳng xuất phát từ C và vuông góc với AB.

Gọi D là điểm bất kì trên AC, trên nó lấy đoạn CE bằng CD [MĐ. 1.3], và dựng tam giác đều FDE từ cạnh DE [MĐ. 1.1], nối F với C. Có thể phát biểu rằng đoạn thẳng FC được dựng vuông góc với đường thẳng AB cho trước từ điểm C nằm trên nó.

Vì DC bằng CE và CF là cạnh chung nên hai đoạn thẳng DC, CF lần lượt bằng EC, CF. Đáy BC cũng bằng đáy FE. Do đó, góc DCF bằng góc ECF [MĐ. 1.8], và chúng kề nhau. Nhưng khi một đoạn thẳng đứng trên một đường thẳng khác và tạo thành hai góc kề bằng nhau, thì mỗi góc ấy là một góc vuông [ĐN. 1.10]. Do đó, DCF và FCE là các góc vuông.

Như vậy, đoạn thẳng CF đã được dựng vuông góc với đường thẳng AB cho trước tại điểm C cho trước nằm trên AB. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 12:</u> Dựng một đoạn thẳng vuông góc với một đoạn thẳng cho trước từ một điểm cho trước không nằm trên đường cho trước này.



Gọi AB là đoạn thẳng cho trước, và C là điểm cho trước không nằm trên AB. Yêu cầu dựng một đường thẳng vuông góc với AB xuất phát từ C là một điểm không nằm trên AB.

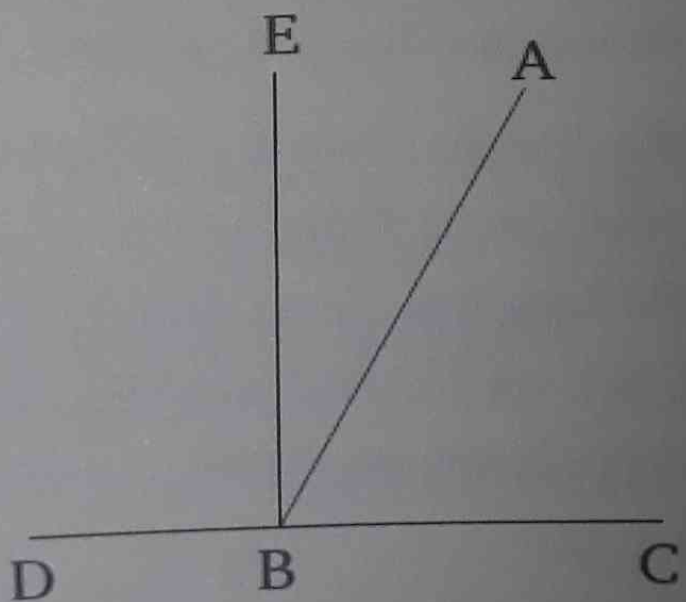
Chọn điểm D ngẫu nhiên ở phía bên kia của đường thẳng AB (so với C), dựng đường tròn EFG tâm C bán kính CD [ĐĐ. 3], EG được chia đôi tại điểm H [MĐ. 10], nối C với G, C với H, và C với E. Có thể phát biểu rằng đoạn CH đã được dựng vuông góc với đoạn thẳng AB từ điểm C không nằm trên đường AB.

Vì GH bằng HE và có HC là cạnh chung, hai đoạn thẳng GH, HC lần lượt bằng với EH, HC, đáy CG cũng bằng

đáy CE. Do đó, góc CHG bằng góc EHC [MĐ. 1.8], và chúng là góc kề. Nhưng khi một đoạn thẳng đứng trên một đường thẳng khác tạo thành hai góc kề bằng nhau, thì mỗi góc ấy là một góc vuông, và đoạn thẳng đang xét được gọi là vuông góc với đường thẳng mà nó đứng tựa lên [ĐN. 1.10].

Như vậy, CH đã được dựng vuông góc với đoạn thẳng AB cho trước từ một điểm C cho trước không nằm trên đoạn AB. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 13:</u> Nếu một đoạn thẳng đứng trên một đoạn thẳng khác và tạo thành hai góc, thì hoặc hai góc cùng là góc vuông, hoặc tổng của hai góc bằng hai góc vuông.

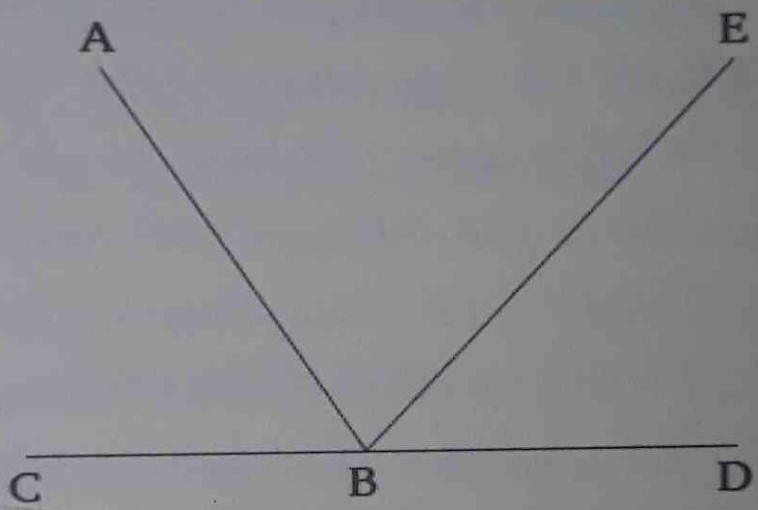


Giả định một đoạn thẳng tùy ý AB đứng tựa lên đường thẳng CD tạo thành các góc CBA và ABD. Có thể phát biểu rằng các góc CBA và ABD là hai góc vuông, hoặc là tổng của hai góc này bằng hai góc vuông.

Thực tế là, nếu CBA bằng ABD thì chúng là hai góc vuông [ĐN. 1.10]. Còn nếu điều này không đúng, gọi BE là đoạn vuông góc với CD được dựng từ điểm B [MĐ. 1.11]. Khi đó, CBE và EBD vuông. Mặt khác, vì góc CBE bằng (tổng) hai góc CBA và ABE, thêm góc EBD vào cả hai lượng này. Vậy tổng của CBE và EBD bằng tổng ba góc CBA, ABE, và EBD [TĐ. 2]. Tương tự, từ DBA bằng DBE và EBA, thêm ABC vào tổng cả hai góc đó. Như vậy, tổng DBA và ABC bằng tổng ba góc DBE, EBA, và ABC [TĐ. 2]. Nhưng đã biết tổng của CBE và EBD cũng bằng tổng ba góc đó. Và những thứ cùng bằng với một thứ khác thì bằng nhau [TĐ. 1]. Nên tổng của CBE và EBD cũng bằng tổng của DBA và ABC. Mà tổng CBE và EBD bằng hai (góc) vuông. Do đó, tổng của ABD và ABC cũng bằng hai vuông.

Như vậy, nếu một đoạn thẳng đứng tựa trên một đoạn thẳng khác thì sẽ tạo thành hai góc hoặc cùng là góc vuông hoặc tổng của hai góc này bằng hai góc vuông. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 14: Nếu hai đường thẳng không nằm cùng phía, tạo với một đường thẳng nào đó các góc kề có tổng bằng hai vuông, tại cùng một điểm cắt nằm trên đường (thứ ba) này, thì hai đường thẳng này sẽ thẳng hàng (trùng khít) với nhau.



Cho trước hai đường thẳng BC và DB không nằm cùng phía và tạo với đường thẳng AB hai góc kề ABC, ABD có tổng bằng hai (góc) vuông, tại điểm B nằm trên chúng. Có thể phát biểu rằng BD thẳng hàng với CB.

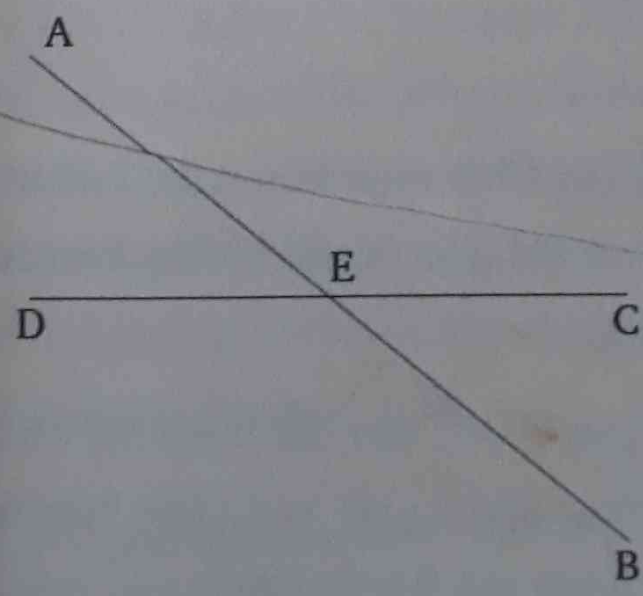
Nếu BD không thẳng hàng với BC, thì giả sử đường thẳng BE là đường thẳng hàng với CB.

Khi đó, vì đường thẳng AB đứng tựa lên đường thẳng CBE, các góc ABC và ABE do đó sẽ có tổng bằng hai vuông [MĐ. 1.13]. Mặt khác tổng của ABC và ABD cũng bằng hai vuông. Vậy tổng của CBA và ABE bằng tổng CBA và ABD

[TĐ. 1]. Bớt CBA từ cả hai tổng trên. Do đó, hai lượng còn lại góc ABE và góc ABD bằng nhau [TĐ. 3], cái nhỏ hơn lại bằng cái lớn hơn. Điều này là không thể. Vậy BE và CB không thẳng hàng. Tương tự, có thể chứng minh rằng không đường nào khác ngoài đường thẳng BD có thể thẳng hàng với BC.

Như vậy, nếu hai đường thẳng không nằm cùng phía, tạo với một đường thẳng nào đó, tại cùng một điểm cắt nằm trên đường thứ ba, các góc kề có tổng bằng hai vuông, thì hai đường thẳng này sẽ thẳng hàng với nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 15:</u> Nếu hai đường thẳng cắt nhau, chúng tạo ra các góc đối đỉnh bằng nhau.



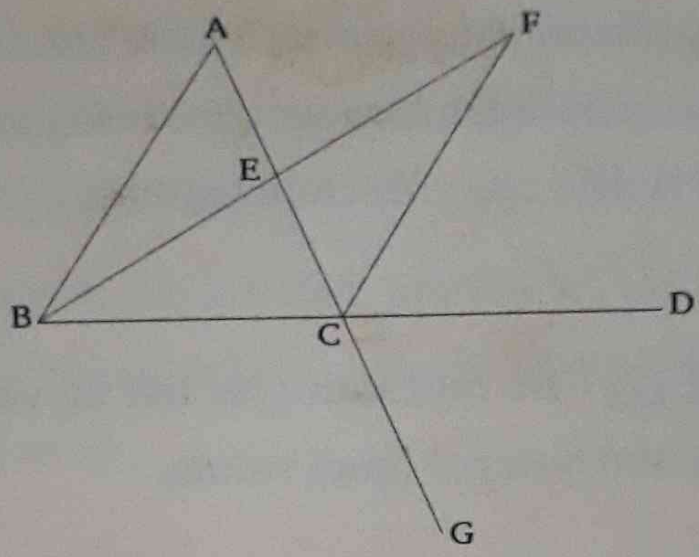
Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm E. Có thể phát biểu rằng góc AEC bằng góc DEB, góc CEB bằng góc AED.

Vì AE cắt đoạn thẳng CD tạo thành hai góc CEA và AED, tổng của chúng do đó bằng hai vuông [MĐ. 1.13]. Thêm nữa, vì DE cắt đoạn thẳng AB tạo thành hai góc AED và DEB, tổng của chúng do đó sẽ bằng hai vuông [MĐ. 1.13]. Nhưng tổng của CEA và AED đã [được chứng tỏ] là bằng hai vuông. Do đó, nó bằng tổng của AED và DEB [TĐ. 1]. Trừ đi AED từ cả hai lượng trên. Phần còn lại CEA do đó sẽ bằng với phần còn lại BED [TĐ. 3]. Tương tự, có thể chứng minh rằng CEB cũng bằng DEA.

Như vậy, nếu hai đường thẳng cắt nhau thì chúng tạo thành các góc đối đỉnh bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh

Mệnh đề 16: Cho một tam giác bất kì, khi kéo dài một cạnh của nó thì góc ngoài sẽ lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

Cho tam giác ABC, kéo dài cạnh BC của nó tới D. Có thể phát biểu rằng góc ngoài ACD lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó, tức là CBA và BAC.



Chia đôi đoạn AC tại điểm E [MĐ. 1.10]. Nối B với E, kéo dài nó theo một đường thẳng tới F.[13] Dựng đoạn EF bằng BE [MĐ. 1.3], tiếp tục nối F với C, kéo dài thêm đoạn AC tới G.

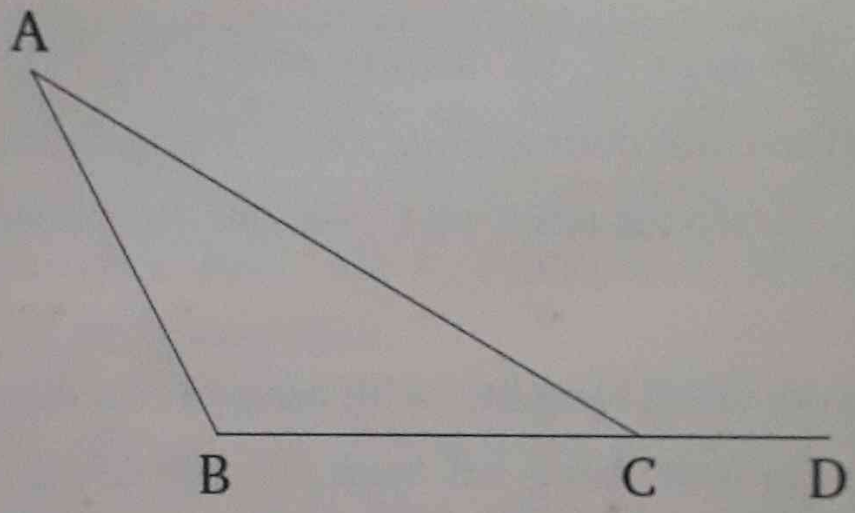
Theo đó, vì AE bằng EC và BE bằng EF, hai đoạn thẳng AE, EB sẽ lần lượt bằng hai đoạn CE, EF. Cũng như vậy, góc AEB bằng góc FEC vì chúng đối đỉnh nhau [MĐ. 1.15]. Từ đó có đáy AB bằng đáy FC, tam giác ABE bằng tam giác FEC, và các góc còn lại đối diện với các cạnh tương ứng bằng nhau thì cũng bằng nhau [MĐ. 1.4]. Tức là, BAE bằng ECF. Nhưng ECD lớn hơn ECF. Do đó ACD lớn hơn BAE. Tương tự, bằng việc chia đôi cạnh BC, có thể chứng minh rằng BCG cũng như ACD, cũng lớn hơn ABC.

---

13 [R. F]: Việc ngầm định rằng điểm F nằm bên trong của góc ABC nên được tính là một định đề bổ sung.

Như vậy, với một tam giác bất kì, khi kéo dài một cạnh của nó thì góc ngoài sẽ lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 17:</u> Cho một tam giác bất kì, tổng của hai góc tùy ý luôn nhỏ hơn hai (góc) vuông.



Cho tam giác ABC. Có thể phát biểu rằng tổng hai góc được chọn tùy ý của tam giác ABC luôn nhỏ hơn hai vuông.

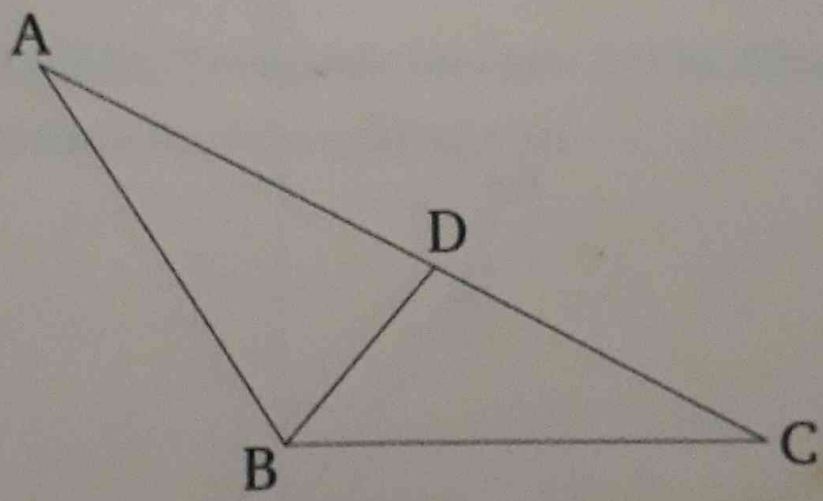
Kéo dài BC tới D.

Vì ACD là góc ngoài đối với tam giác ABC, nó lớn hơn góc đối bên trong ABC [MĐ. 1.16]. Cộng góc ACB vào cả hai góc kề và đối. Như vậy, tổng các góc ACD và ACB lớn hơn tổng của ABC và BCA. Mà tổng của ACD và ACB lại bằng hai vuông [MĐ. 1.13]. Do đó, tổng của ABC và BCA

phải nhỏ hơn hai vuông. Tương tự, có thể chứng tỏ rằng tổng của BAC và ACB cũng nhỏ hơn hai vuông, và cả tổng của CAB và ABC cũng vậy.

Như vậy, trong một tam giác bất kì, tổng hai góc được tổ hợp tùy ý luôn nhỏ hơn hai vuông. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 18:</u> Trong một tam giác bất kì, cạnh lớn hơn chắn góc lớn hơn.



Cho tam giác ABC với cạnh AC lớn hơn cạnh AB. Có thể phát biểu rằng góc ABC cũng lớn hơn BCA.

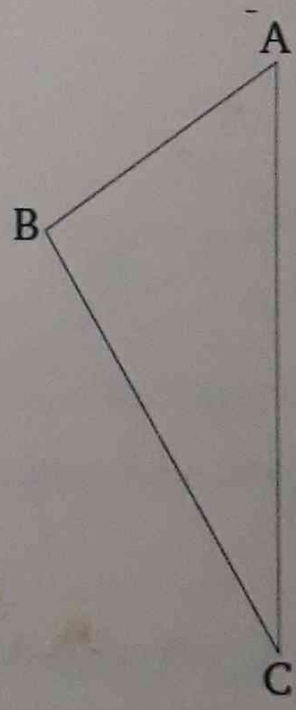
Vì AC lớn hơn AB, dựng AD bằng với AB [MĐ. 1.3], và nối B với D.

Và bởi vì ADB là góc ngoài đối với tam giác BCD nên

nó lớn hơn góc trong (không kề) DCB [MĐ. 1.16]. Mà cạnh AB bằng cạnh AD nên góc ADB bằng góc ABD [MĐ. 1.5]. Do đó, góc ABD lớn hơn góc ACB. Cuối cùng, góc ABC lớn hơn góc ACB.

Như vậy, trong tam giác bất kì, cạnh lớn hơn chắn góc lớn hơn. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 19:</u> Trong tam giác bất kì, góc lớn hơn bị chắn bởi cạnh lớn hơn.



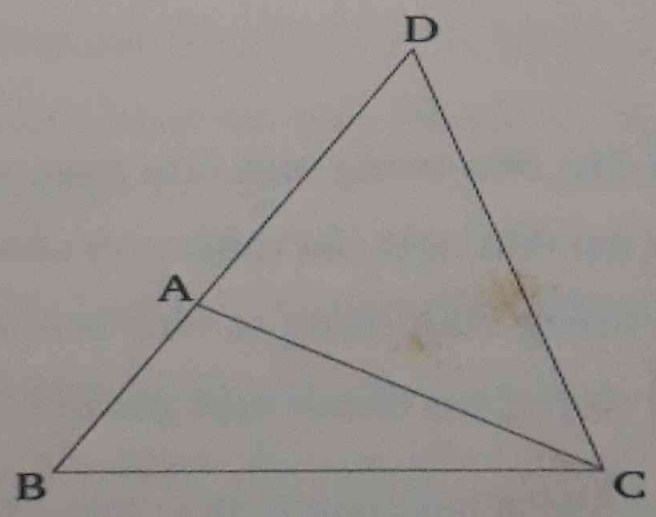
Cho tam giác ABC với góc ABC lớn hơn góc BCA. Có thể phát biểu rằng cạnh AC cũng lớn hơn cạnh AB.

Vì nếu không, AC rõ ràng chỉ có thể bằng hoặc nhỏ

hơn AB. Thực tế là AC không bằng AB. Vì nếu vậy thì góc ABC cũng sẽ bằng góc ACB [MĐ. 1.5]. Nhưng hai góc này không bằng nhau. Vậy AC không bằng AB. Cũng vậy, AC không nhỏ hơn AB. Vì thì góc ABC cũng sẽ nhỏ hơn góc ACB [MĐ. 1.18]. Nhưng góc ABC không nhỏ hơn ACB. Do đó, AC không nhỏ hơn AB. Mà theo chứng minh trên, AC cũng không bằng AB. Vậy AC lớn hơn AB.

Như vậy, trong tam giác bất kì, góc lớn hơn bị chắn bởi cạnh lớn hơn. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 20:</u> Trong một tam giác bất kì, tổng của hai cạnh bất kì luôn lớn hơn cạnh còn lại.



Gọi tam giác bất kỳ là ABC. Có thể phát biểu rằng trong tam giác ABC, tổng hai cạnh bất kì luôn lớn hơn cạnh còn lại. Tức là, tổng của BA và AC lớn hơn BC, tổng AB và BC

lớn hơn AC, tổng BC và CA lớn hơn AB.

Kéo dài BA tới điểm D sao cho AD bằng CA [MĐ. 1.3] và nối D với C.

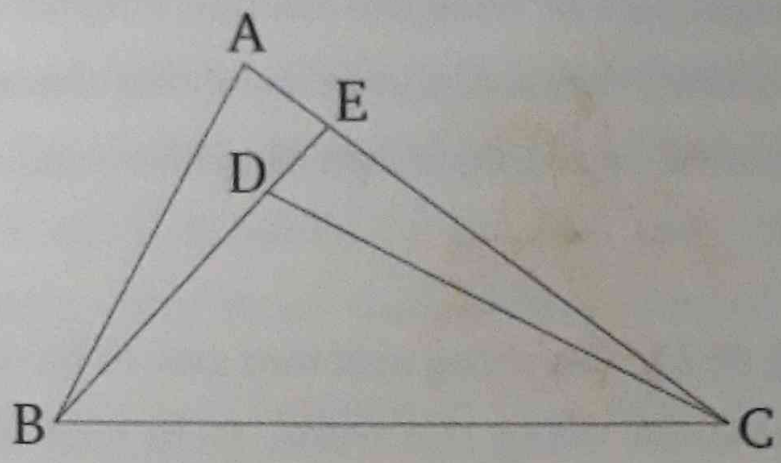
Bởi vì DA bằng AC nên góc ADC cũng bằng ACD [MĐ. 1.5]. Vậy góc BCD lớn hơn góc ADC. Và vì DCB là tam giác có góc BCD lớn hơn góc BDC, và vì góc lớn sẽ đối diện cạnh lớn hơn [MĐ. 1.19] nên DB lớn hơn BC. Do đó, tổng của BA và AC lớn hơn BC. Tương tự, có thể chứng minh được tổng của AB và BC lớn hơn AC, và tổng BC, CA cũng lớn hơn AB.

Như vậy, trong tam giác bất kỳ, tổng của hai cạnh bất kì luôn lớn hơn cạnh còn lại. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 21:</u> Bên trong một tam giác, nếu dựng hai đoạn thẳng từ hai đầu mút của một cạnh của tam giác thì tổng các đoạn thẳng được dựng sẽ nhỏ hơn tổng hai cạnh còn lại, nhưng chúng tạo thành một góc lớn hơn.

Gọi BD và DC là hai đoạn thẳng được dựng bên trong tam giác ABC, tương ứng (được dựng) từ hai đầu mút B và C của cạnh BC. Có thể phát biểu rằng tổng BD và DC nhỏ hơn tổng hai cạnh còn lại BA và AC của tam giác, nhưng tạo

thành góc BDC lớn hơn góc BAC.

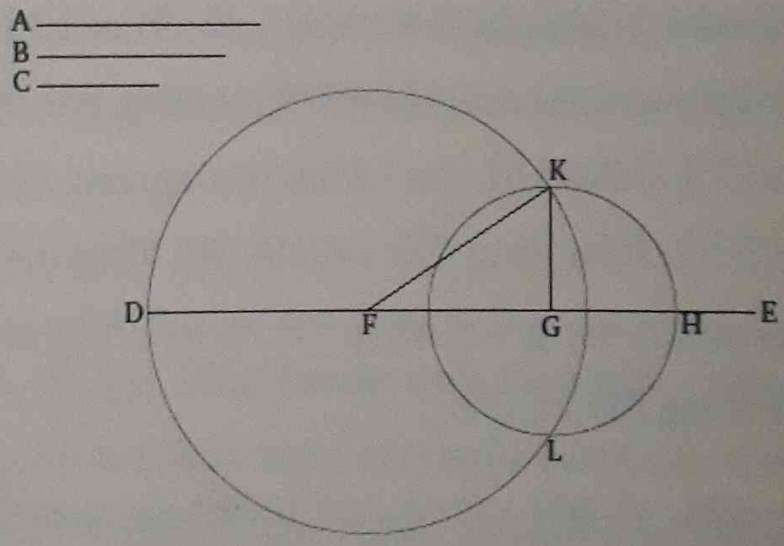


Kéo dài BD tới E. Vì tổng hai cạnh bất kì trong một tam giác luôn lớn hơn cạnh còn lại [MĐ. 1.20] nên trong tam giác ABE tổng của AB và AE lớn hơn BE. Thêm EC vào cả hai lượng này. Tổng của BA và AC do đó sẽ lớn hơn tổng BE và EC. Tiếp tục với tam giác CDE, vì tổng hai cạnh CE và ED lớn hơn CD, thêm DB vào cả hai lượng này. Khi đó, tổng của CE và EB lớn hơn tổng CD và DB. Mà tổng BA và AC đã được chứng minh bằng với tổng BE và EC. Vậy tổng BA và AC lớn hơn tổng BD và DC.

Thêm nữa, vì góc ngoài của một tam giác bất kì lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó [MĐ. 1.16] nên trong tam giác CDE, góc ngoài BDC sẽ lớn hơn góc CED. Tương tự, góc ngoài CEB của tam giác ABE cũng lớn hơn BAC. Mà BDC bằng BAC theo chứng minh trên. Do đó, BDC lớn hơn BAC.

Như vậy, bên trong một tam giác nếu dựng hai đoạn thẳng từ hai đầu mút của một trong các cạnh thì tổng hai đoạn được dựng sẽ nhỏ hơn tổng hai cạnh còn lại, nhưng chúng tạo thành một góc lớn hơn. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 22:</u> Hãy dựng một tam giác từ ba đoạn thẳng bằng với ba đoạn thẳng cho trước. Điều kiện là tổng của hai đoạn bất kỳ trong ba đoạn đã cho phải lớn hơn đoạn còn lại [vì, một tam giác bất kì luôn có tổng hai cạnh tùy ý lớn hơn cạnh còn lại] [MĐ. 1.20]



Gọi A, B, C là ba đoạn thẳng cho trước mà tổng của hai trong ba đoạn lớn hơn đoạn còn lại. Tức là, tổng của A và B lớn hơn C, tổng A và C lớn hơn B, tổng B và C cũng lớn hơn A. Vậy cần phải dựng một tam giác từ các đoạn thẳng bằng với A, B, và C.

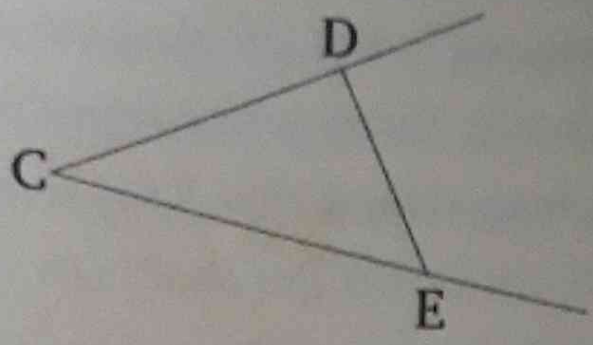
Đặt trước một đường thẳng tùy ý, với điểm mút tại D và vô hạn theo hướng của E. Đặt DF bằng với A, FG bằng B, và GH bằng C [MĐ. 1.3]. Đựng đường tròn DKL tâm F bán kính FD. Tiếp tục dựng đường tròn KLH tâm G bán kính GH. Nối K với F, K với G. Có thể phát biểu rằng tam giác KFG đã được dựng từ các đường thẳng bằng với A, B và C.

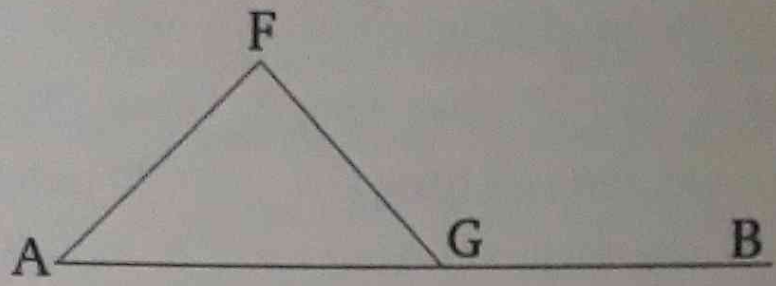
Bởi vì, F là tâm đường tròn DKL, nên có FD bằng FK. Mà FD bằng A. Vậy KF cũng bằng A. Cũng vậy, vì G là tâm đường tròn LKH nên GH bằng GK. Mà GH bằng C. Vậy KG cũng bằng C. Mặt khác FG cũng bằng B. Do đó, KF, FG và GK lần lượt bằng A, B, và C.

Như vậy, tam giác KFG đã được dựng từ ba đoạn thẳng KF, FG, và GK và lần lượt bằng với ba đoạn A, B, và C cho trước. Đây chính là yêu cầu cần phải hoàn thành.

<u>Mệnh đề 23:</u> Dựng góc thẳng bằng với một góc thẳng cho trước tại một điểm cho trước nằm trên một đường thẳng cho trước.

Gọi AB là đường thẳng đã cho, điểm A nằm trên nó, và góc thẳng DCE cho trước. Vậy yêu cầu phải thực hiện là dựng một góc thẳng bằng với góc thẳng DCE đã cho tại điểm A cho trước nằm trên đường thẳng AB cho trước.



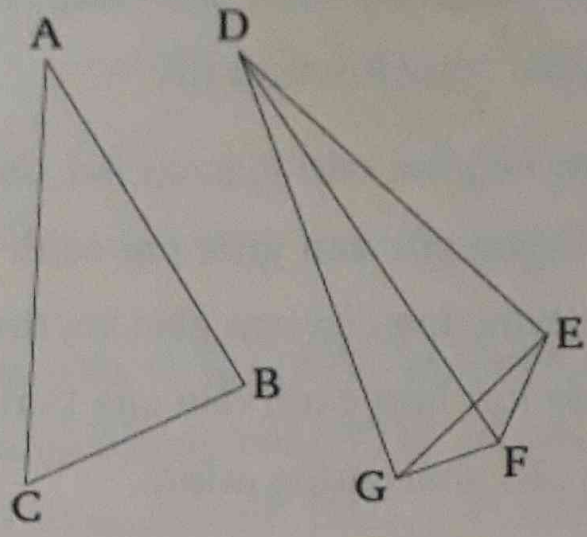


Gọi D và E là hai điểm lần lượt chọn ngẫu nhiên trên CD và CE, rồi nối D với E. Tam giác AFG được dựng từ ba đoạn thẳng bằng với ba đường CD, DE và CE sao cho CD bằng AF, CE bằng AG, và DE bằng FG. [MĐ. 1.22].

Do đó, từ DC và CE tương ứng bằng FA và AG, [và] hơn nữa đáy DE bằng đáy FG, góc DCE do đó sẽ bằng góc FAG [MĐ. 1.8].

Như vậy, góc thẳng FAG bằng với góc thẳng DCE đã cho và đã được dựng tại điểm A (cho trước) trên đường thẳng AB cho trước. Đây chính là yêu cầu cần phải hoàn thành.

Mệnh đề 24: Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, nhưng góc xen giữa hai cạnh của tam giác này lớn hơn góc tương ứng của tam giác kia thì tam giác ban đầu sẽ có cạnh đáy lớn hơn cạnh đáy của tam giác còn lại.



Gọi ABC và DEF là hai tam giác có hai cạnh AB và AC lần lượt bằng hai cạnh DE và DF. Tức là, AB bằng DE, AC bằng DF. Cho góc A lớn hơn góc D. Có thể phát biểu rằng cạnh đáy BC cũng lớn hơn cạnh đáy EF.

Vì BAC lớn hơn EDF, có thể dựng góc EDG bằng góc BAC tại điểm D trên đoạn thẳng DE [MĐ. 1.23].Và dựng sao cho đoạn DG bằng AC hoặc DF [MĐ. 1.3], rồi nối E với G, F với G.

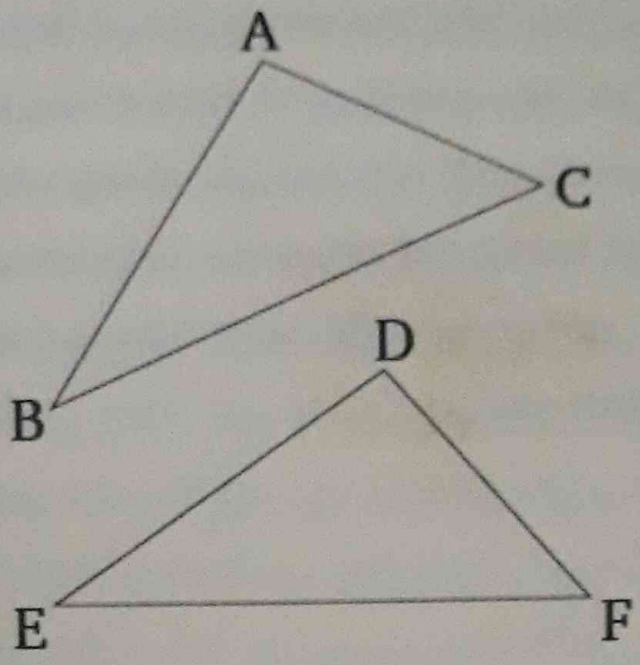
Theo đó, vì AB bằng DE và AC bằng DG nên hai đoạn thẳng BA, AC lần lượt bằng hai đoạn thẳng ED, DG. Cùng lúc góc BAC bằng góc EDG. Do đó, cạnh đáy BC bằng cạnh

đáy EG [MĐ. 1.4]. Hơn nữa, vì DF bằng DG nên góc DGF cũng bằng góc DFG [MĐ. 1.5]. Do đó, DFG lớn hơn EGF. Vậy EFG càng lớn hơn EGF. Mặt khác, vì tam giác EFG có góc EFG lớn hơn góc EGF, và vì góc lớn hơn bị chắn bởi cạnh lớn hơn [MĐ. 1.19] nên cạnh EG cũng lớn hơn EF. Mà EG bằng BC nên BC cũng lớn hơn EF.

Như vậy, nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, nhưng góc xen giữa hai cạnh của tam giác này lớn hơn góc tương ứng của tam giác kia thì tam giác ban đầu sẽ có cạnh đáy lớn hơn cạnh đáy của tam giác còn lại. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 25:</u> Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, nhưng cạnh đáy của tam giác này lớn hơn cạnh đáy tam giác kia, thì tam giác ban đầu cũng sẽ có góc tạo bởi hai cạnh đang xét lớn hơn góc tương ứng của tam giác còn lại.

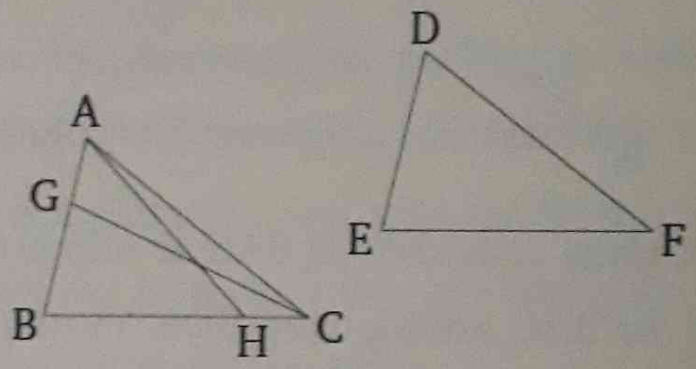
Gọi ABC và DEF là hai tam giác có hai cạnh AB và AC tương ứng bằng với hai cạnh DE và DF. Tức là AB bằng DE, AC bằng DF. Cho cạnh đáy BC lớn hơn cạnh đáy EF. Có thể phát biểu rằng góc BAC cũng lớn hơn EDF.



Vì nếu không, chắc chắn là BAC sẽ nhỏ hơn hoặc bằng EDF. Thực tế thì BAC không bằng EDF. Vì nếu như vậy thì đáy BC cũng phải bằng đáy EF [MĐ. 1.4]. Nhưng thực tế không phải như vậy. Cũng vậy, góc BAC không bằng góc EDF. Góc BAC cũng không nhỏ hơn EDF. Vì nếu như vậy thì đáy BC phải nhỏ hơn đáy EF [MĐ. 1.24]. Nhưng thực tế không phải như vậy. Vậy góc BAC không nhỏ hơn EDF. Nhưng đã chứng minh được rằng BAC không bằng EDF. Do đó, BAC lớn hơn EDF.

Như vậy, nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, nhưng cạnh đáy của tam giác này lớn hơn cạnh đáy tam giác kia thì tam giác ban đầu cũng sẽ có góc tạo bởi hai cạnh đang xét lớn hơn góc tương ứng của tam giác còn lại. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 26:</u> Nếu hai tam giác có hai cặp góc tương ứng bằng nhau, và có một cạnh tương ứng bằng nhau, mà cạnh này là một cạnh của hai góc đang xét, hoặc là cạnh nằm chắn một trong hai góc này – thì các cạnh còn lại của hai tam giác sẽ tương ứng bằng nhau, góc còn lại cũng tương ứng bằng nhau.



Gọi ABC và DEF là hai tam giác với hai góc ABC, BCA tương ứng bằng hai góc DEF, EFD. Tức là góc ABC bằng góc DEF, góc BCA bằng góc EFD. Và giả thiết cho là hai tam giác này có một cặp cạnh bằng nhau.Trước tiên, xét trường hợp đó là cạnh kề với hai góc tương ứng bằng nhau. Tức là BC bằng EF. Có thể phát biểu rằng các cạnh còn lại của hai tam giác sẽ tương ứng bằng nhau. Tức AB bằng DE, AC bằng DF. Góc còn lại của chúng cũng tương ứng bằng nhau. Tức góc BAC bằng góc EDF.

Vì nếu AB không bằng DE thì một trong hai cạnh sẽ lớn hơn. Giả sử AB là cạnh lớn hơn, và dựng BG bằng DE [MD. 1.3]. Nối G với C.

Theo đó, vì BG bằng DE và BC bằng EF nên hai đoạn GB, BC tương ứng bằng DE, EF. Hơn nữa, tam giác GBC bằng tam giác DEF. Do đó, cạnh đáy GC bằng cạnh đáy DF, tam giác GBC bằng tam giác DEF, và các góc còn lại bị chắn bởi các cạnh tương ứng bằng nhau cũng bằng nhau [MĐ. 1.4]. Vậy GCB bằng DFE. Mà DFE bằng BCA theo giả thiết. Do đó, BCG cũng bằng BCA, tức cái nhỏ hơn bằng cái lớn hơn. Điều này là không thể. Vậy AB không thể khác DE, tức là nó bằng DE. Hơn nữa BC cũng bằng EF. Như vậy, hai đoạn AB, BC tương ứng bằng với DE, EF. Góc ABC bằng góc DEF. Do đó, đáy BC bằng đáy DF, và hai góc còn lại BAC, EDF cũng bằng nhau [MĐ.1.4].

Xét trường hợp còn lại khi hai cạnh bằng nhau nằm chắn hai góc bằng nhau, chẳng hạn cho AB bằng DE. Khi đó cũng có thể phát biểu rằng các cạnh còn lại của hai tam giác sẽ tương ứng bằng nhau. Tức AC bằng DF, BC bằng EF. Hơn nữa, hai góc còn lại BAC và EDF cũng bằng nhau.

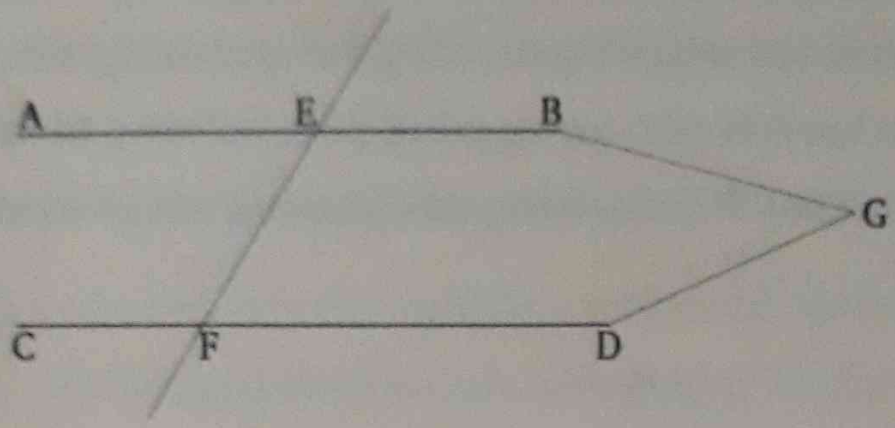
Vì nếu BC không bằng EF thì một trong chúng phải lớn hơn. Giả sử BC là đoạn lớn hơn. Dựng đoạn BH bằng EF [MĐ. 1.3], nối A với H. Vì BH bằng EF và AB bằng DE nên hai đoạn AB, BH lần lượt bằng DE, EF. Và góc xen giữa chúng cũng bằng nhau. Do đó, đáy AH bằng đáy DF, tam giác ABH bằng tam giác DEF, và các góc còn lại bị chắn bởi các

cạnh tương ứng bằng nhau thì cũng bằng nhau [MĐ. 1.4]. Vậy BHA bằng EFD. Mà EFD bằng BCA. Như vậy, trong tam giác AHC, góc ngoài BHA bằng với BCA là góc trong không kề với nó. Điều này là không thể [MĐ. 16]. Do đó, BC không thể không bằng EF. Tức là nó bằng EF. Vậy hai đoạn AB, BC lần lượt bằng DE, EF. Và góc xen giữa chúng cũng bằng nhau. Cạnh đáy AC do đó sẽ bằng cạnh đáy DF, tam giác ABC bằng tam giác DEF, và hai góc còn lại BAC, EDF cũng bằng nhau [MĐ. 1.4]

Như vậy, nếu hai tam giác có hai cặp góc tương ứng bằng nhau, và có một cạnh tương ứng bằng nhau mà cạnh này là cạnh của hai góc đang xét, hoặc nằm chắn một trong số chúng – thì các cạnh còn lại của hai tam giác sẽ tương ứng bằng nhau, góc còn lại cũng tương ứng bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 27:</u> Nếu một đường thẳng cắt qua hai đường thẳng khác tạo thành các góc so le bằng nhau, thì hai đường thẳng bị cắt đó song song với nhau.

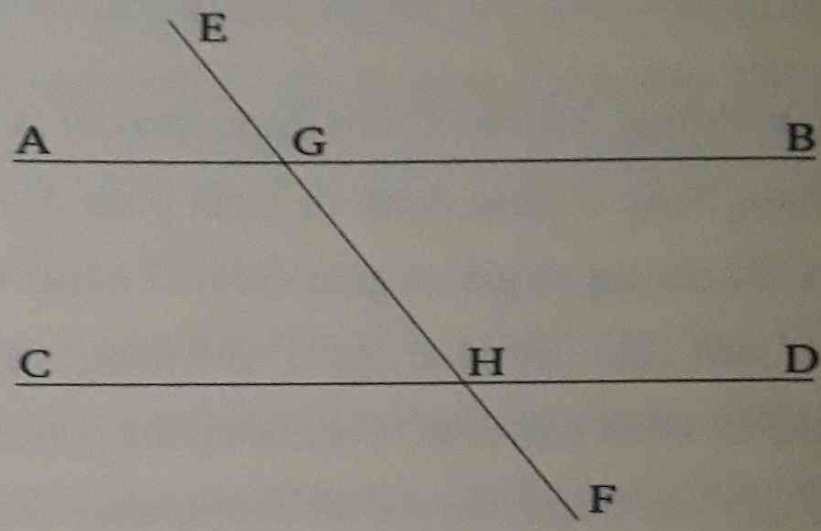
Cho đường thẳng EF cắt qua hai đường thẳng AB và CD, tạo thành các góc so le AEF và EFD bằng nhau. Có thể phát biểu rằng AB và CD song song với nhau.



Vì nếu không, AB và CD khi được kéo dài ra chắc chắn sẽ giao nhau, hoặc ở phía B và D, hoặc phía A và C [ĐN. 1.23]. Kéo dài chúng và giả sử giao điểm D nằm về phía của B và D. Xét tam giác GEF, góc ngoài AEF bằng với góc trong không kề EFD. Điều này thực tế là không thể [MĐ. 1.16]. Do đó, AB và CD khi được kéo dài sẽ không giao nhau về phía của B và D. Tương tự, có thể chứng minh hai đường không thể cắt nhau theo hướng của A và C. Mà hai đường thẳng không cắt nhau theo cả hai hướng thì song song với nhau [MĐ. 1.23]. Do đó, AB và CD song song.

Như vậy, nếu một đường thẳng cắt qua hai đường thẳng khác tạo thành các góc so le bằng nhau, thì hai đường thẳng bị cắt đó song song với nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 28: **Nếu một đường thẳng cắt qua hai đường thẳng khác tạo ra góc ngoài bằng với góc trong đồng vị của nó hoặc tạo hai góc trong cùng phía có tổng là hai (góc) vuông, thì hai đường thẳng đã cho song song với nhau.**



Cho EF cắt qua AB và CD, tạo thành góc ngoài EGB bằng với góc đối đỉnh bên trong GHD, hoặc là tổng của hai góc trong cùng phía BGH và GHD có tổng bằng hai vuông. Có thể phát biểu rằng AB song song với CD.

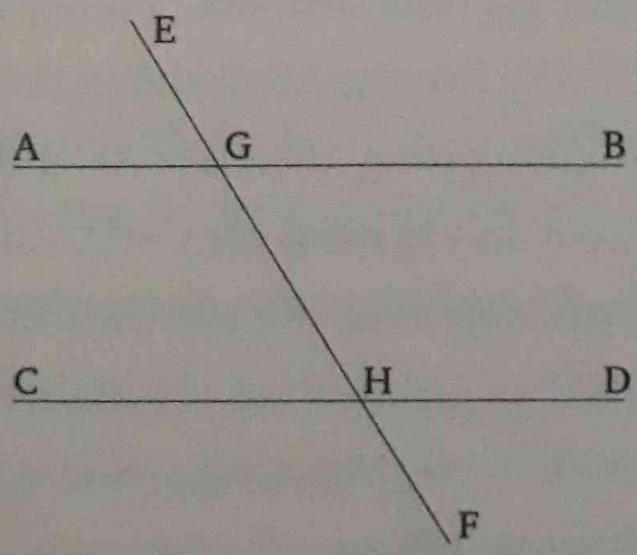
Trong trường hợp đầu tiên, vì EGB bằng GHD, mặt khác EGB bằng AGH [MĐ. 1.15], do đó AGH cũng bằng GHD. Mà chúng là các góc so le trong. Vậy AB song song với CD [MĐ. 1.27].

Tiếp theo là trường hợp thứ hai, vì tổng của BGH và GHD bằng hai vuông nên tổng của AGH và BGH cũng bằng

hai vuông [MĐ. 1.13]. Tổng AGH và BGH do đó sẽ bằng với tổng BGH và GHD. Bớt đi BGH từ cả hai đại lượng trên. Các phần còn lại AGH và GHD bằng nhau. Mà chúng là các góc so le trong. Do đó, AB song song với CD [MĐ. 1.27].

Như vậy, nếu một đường thẳng cắt qua hai đường thẳng khác tạo ra góc ngoài bằng với góc trong đồng vị của nó hoặc hai góc trong cùng phía có tổng là hai vuông, thì hai đường thẳng đã cho song song với nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 29:</u> Một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song sẽ tạo ra các góc so le bằng nhau theo cặp, góc ngoài bằng góc trong đồng vị, và tổng của các góc trong cùng phía sẽ bằng hai (góc) vuông.

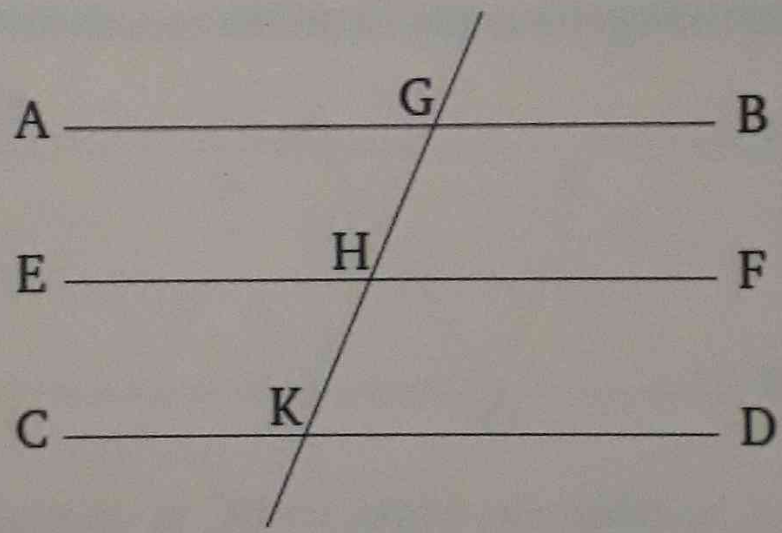


Cho đường thẳng EF cắt qua hai đường thẳng AB và CD. Có thể phát biểu rằng đường EF tạo các góc so le AGH và GHD bằng nhau, góc ngoài EGB bằng với góc trong đồng vị GHD, và tổng các góc trong cùng phía góc BGH và góc GHD bằng hai vuông.

Giả sử góc AGH không bằng với góc GHD, thì một trong hai góc này phải có giá trị lớn hơn. Giả định góc AGH là góc lớn hơn. Cộng thêm góc BGH vào cả hai góc này. Như vậy, tổng của góc AGH và góc BGH sẽ lớn hơn tổng của góc BGH và góc GHD. Tuy nhiên, tổng của AGH và BGH bằng góc vuông [MĐ. 1.13]. Do vậy, tổng của góc BGH và góc GHD phải nhỏ hơn hai vuông. Nhưng các đường thẳng kéo dài tới vô cực, xuất phát từ các góc trong có tổng nhỏ hơn hai góc vuông, sẽ cắt nhau [TĐ. 5]. Như vậy AB và CD, kéo dài ra vô tận, se cắt nhau. Nhưng các đường thẳng này không cắt nhau [vì] theo như giả định ban đầu [chúng] là hai đường song song [ĐN. 1.23]. Do vậy, AGH không thể không bằng với GHD. Do đó, chúng bằng nhau. Mà AGH thì bằng EGB [MĐ. 1.15]. Và EGB do vậy bằng với GHD. Cộng thêm góc BGH vào cả hai góc này, tổng của góc EGB và góc BGH sẽ bằng tổng của BGH và GHD. Tổng của EGB và BGH bằng với hai vuông [MĐ. 1.13]. Nên tổng của góc BGH và góc GHD cũng sẽ bằng hai vuông.

Như vậy, đường thẳng cắt qua hai đường thẳng song song sẽ tạo ra các góc so le bằng nhau theo cặp, góc ngoài bằng góc trong đồng vị, và tổng của các góc trong cùng phía sẽ bằng hai vuông. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 30:</u> Các đường thẳng song song với cùng một đường thẳng thì cũng song song với nhau.



Cho các đường thẳng AB và CD song song với EF. Có thể phát biểu rằng AB cũng song song với CD.

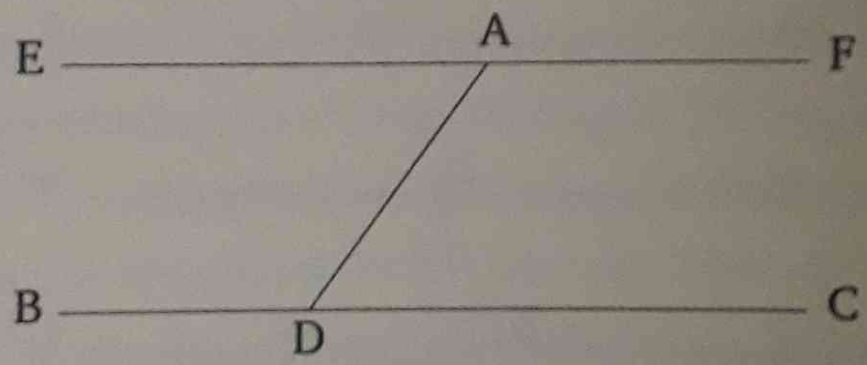
Vẽ GK cắt qua các đường thẳng AB, CD và EF.

Vì GK cắt qua hai đường thẳng song song AB và EF, nên góc AGK bằng góc GHF [MĐ. 1.29]. Tương tự, do GK cắt qua hai đường thẳng song song EF và CD, nên góc GHF

bằng góc GKD [MĐ. 1.29]. Do vậy, góc AGK bằng góc GKD. Và các góc so le bằng nhau. Do vậy AB song song với CD [MĐ. 1.27].

Như vậy, các đường thẳng song song với cùng một đường thẳng thì cũng song song với nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 31:</u> Hãy vẽ một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước và đi qua một điểm cho trước.



Gọi A là điểm cho trước, và BC là đường thẳng cho trước. Yêu cầu vẽ một đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng BC.

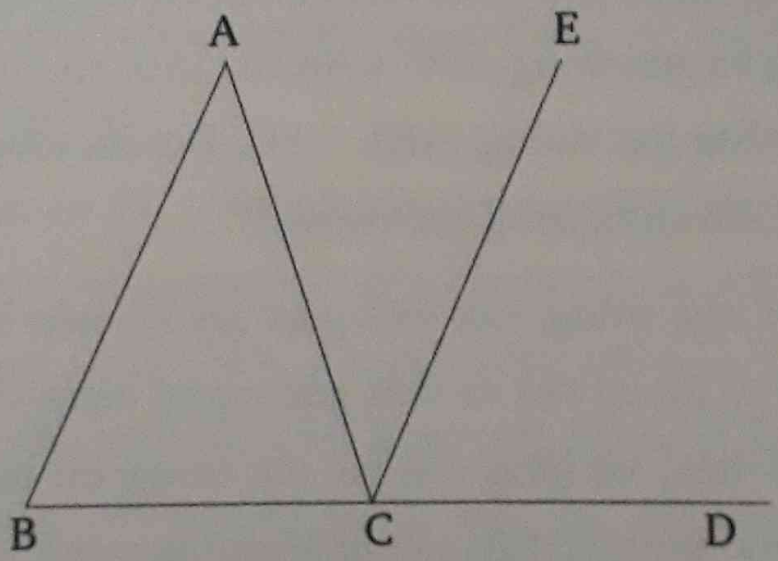
Lấy một điểm D bất kỳ trên đường thẳng BC và nối đoạn AD. Từ điểm A và đoạn thẳng DA dựng được góc DAE bằng với góc ADC [MĐ. 1.23]. Vẽ đường AF thẳng hàng với EA.

Do đoạn AD cắt qua hai đường thẳng BC và EF, và tạo

ra hai góc so le EAD và ADC bằng nhau, nên EAF song song với BC [MĐ. 1.27].

Như vậy, đường thẳng EAF được vẽ song song với đường thẳng BC cho trước và đi qua điểm A cho trước. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 32:</u> Trong một tam giác bất kỳ, nếu kéo dài một cạnh bất kỳ thì sẽ tạo ra một góc ngoài bằng tổng hai góc trong đối diện, và tổng của ba góc trong thì bằng hai (góc) vuông.



Cho tam giác ABC, kéo dài cạnh BC tới D. Có thể phát biểu rằng góc ngoài ACD bằng tổng của hai góc trong đối diện CAB và ABC, và tổng các góc trong ABC, BCA và CAB của tam giác này bằng hai góc vuông.

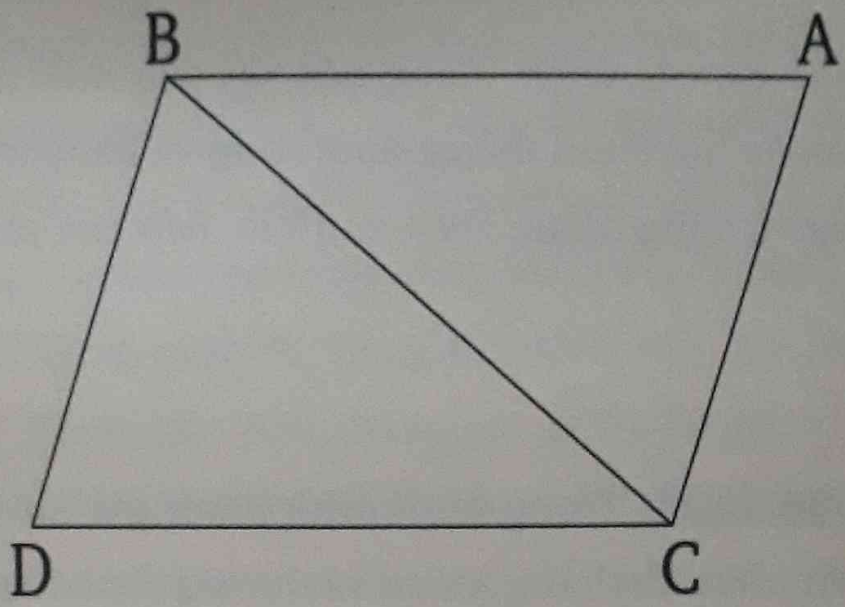
Từ điểm C vẽ đường CE song song với đường thẳng AB [MĐ. 1.31].

Do AB song song với CE, và đường thẳng AC cắt qua hai đường thẳng song song này, nên các góc so le BAC và ACE là bằng nhau [MĐ. 1.29]. Đồng thời, do AB song song với CE và đường thẳng BD cắt qua hai đường thẳng song song này, góc ngoài ECD bằng góc trong đồng vị ABC [MĐ. 1.29]. Nhưng góc ACE cũng đã được chứng minh là bằng góc BAC, nên toàn bộ góc ACD bằng tổng của hai góc trong đối diện BAC và ABC.

Cộng thêm góc ACB vào cả hai, có tổng ACD và ACB bằng tổng ba góc trong ABC, CBA và CAB. Và tổng của ACD và ACB bằng hai vuông [MĐ. 1.13]. Do đó, tổng của ABC, CBA và CAB cũng bằng hai vuông.

Như vậy, trong một tam giác bất kỳ, nếu kéo dài một cạnh bất kỳ thì sẽ tạo ra một góc ngoài bằng tổng hai góc trong đối diện, và tổng của ba góc trong thì bằng hai góc vuông. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 33:</u> Các đoạn thẳng nối hai đầu mút nằm cùng một phía của hai đoạn thẳng song song và bằng nhau cũng song song và bằng nhau.



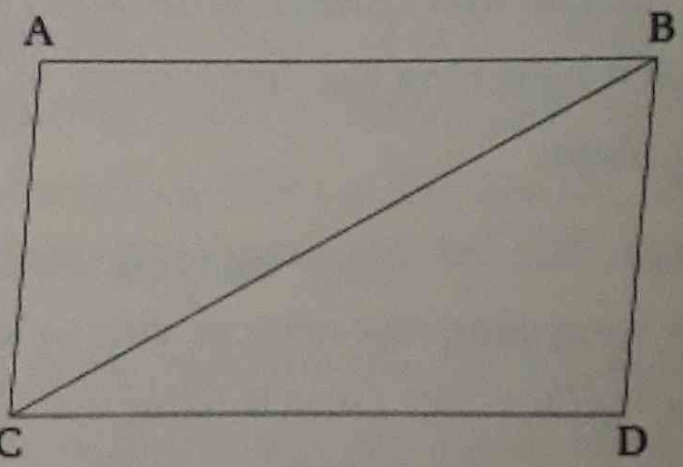
Gọi AB và CD là các đoạn thẳng song song và bằng nhau, và nối các đầu mút cùng phía để tạo ra các đoạn AC và BD. Có thể phát biểu rằng hai đoạn thẳng AC và BD là song song và bằng nhau.

Nối đoạn BC. Do AB song song với CD, và BC cắt qua hai đoạn song song này nên các góc so le ABC và BCD là bằng nhau [MĐ. 1.29]. Do AB bằng với CD, BC là cạnh chung nên cặp cạnh AB, BC bằng với cặp cạnh DC, CB. Và góc ABC bằng với góc BCD. Do vậy, đáy AC bằng đáy BD, và tam giác ABC bằng tam giác DCB, và các góc còn lại bị chắn bởi các cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì cũng bằng nhau [MĐ. 1.4]. Như vậy, góc ACB bằng góc CBD. Cũng vậy, vì đường thẳng BC cắt qua hai đường thẳng AC và BD và tạo ra cặp góc so le ACB và BCD bằng nhau, nên AC song song

với BD [MĐ. 1.27]. Và AC đã được chứng minh bằng với BD.

Như vậy, các đoạn thẳng nối hai đầu mút nằm cùng một phía của hai đoạn thẳng song song và bằng nhau cũng song song và bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 34:</u> Trong hình bình hành thì các cặp cạnh và góc đối nhau thì bằng nhau, và đường chéo sẽ chia hình này thành hai phần bằng nhau.



Gọi ABCD là một hình bình hành, và BC là đường chéo của hình này. Có thể phát biểu rằng các cạnh và góc đối nhau của hình ABCD bằng nhau theo cặp và đường chéo BC chia hình này thành hai phần bằng nhau.

Do AB song song với CD và đường thẳng BC cắt qua chúng, nên các góc so le ABC và BCD là bằng nhau [MĐ. 1.29]. Cũng vậy, do AC song song với BD và BC cắt qua chúng,

các góc so le ACB và CBD cũng bằng nhau [MĐ. 1.29]. Như vậy hai tam giác ABC và BCD có các góc ABC và BCA tương ứng bằng các góc BCD và CBD, và có một cạnh chung BC nằm giữa các cặp góc tương ứng này. Do đó, các cặp cạnh tương ứng còn lại cũng bằng nhau [MĐ. 1.26]. Nghĩa là cạnh AB bằng CD, và cạnh AC bằng BD. Hơn nữa, góc BAC bằng góc CDB. Và do góc ABC bằng góc BCD, và góc CBD bằng góc ACB, nên góc tổng ABD bằng góc tổng ACD. Và góc BAC cũng được chứng minh bằng với góc CDB.

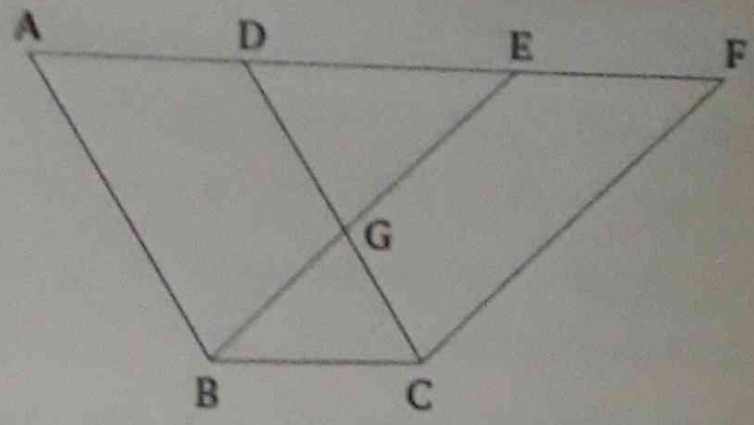
Như vậy, trong hình bình hành thì các cặp cạnh và cặp góc đối nhau thì bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 35:</u> Các hình bình hành có chung cạnh đáy và nằm giữa hai đường thẳng song song thì bằng nhau[14].

Hai hình bình hành ABCD và BCEF có cạnh đáy BC chung và nằm giữa cặp đường thẳng song song AF và BC. Có thể phát biểu rằng ABCD bằng BCEF.

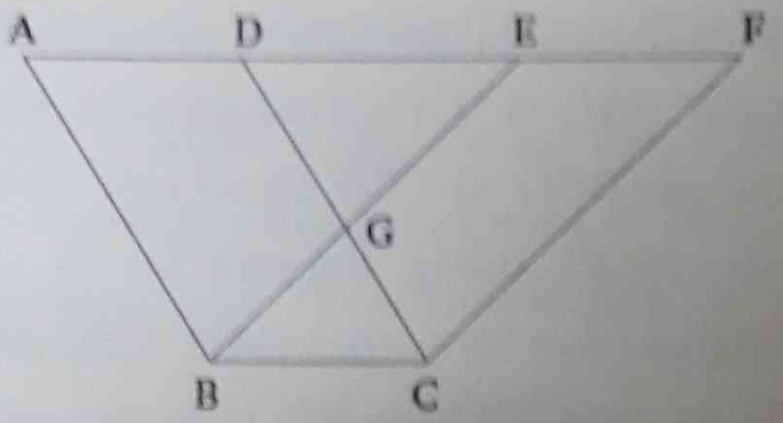
---

14 Ở đây, lần đầu tiên "bằng nhau" có nghĩa là bằng về diện tích, chứ không chỉ là "trùng khít lên nhau".



Do ABCD là hình bình hành nên AD bằng BC [MĐ. 1.34]. Tương tự, EF cũng bằng BC. Do vậy, AD cũng bằng EF. Và DE là cạnh chung, nên đoạn thẳng tổng AE bằng đoạn thẳng tổng DF. Và AB cũng bằng CD. Nên cặp cạnh EA, AB tương ứng bằng cặp cạnh FD, DC. Và góc ngoài FDC bằng góc trong EAB [MĐ. 1.29]. Do vậy, đáy EB bằng đáy FC và tam giác EAB bằng DFC [MĐ. 1.4]. Trừ tam giác DEG khỏi hai tam giác này thì hình thang còn lại ABGD bằng hình thang còn lại EGCF. Lại thêm tam giác GBC vào hai hình thang này. Như vậy, hình bình hành tổng ABCD bằng hình bình hành tổng EBCF.

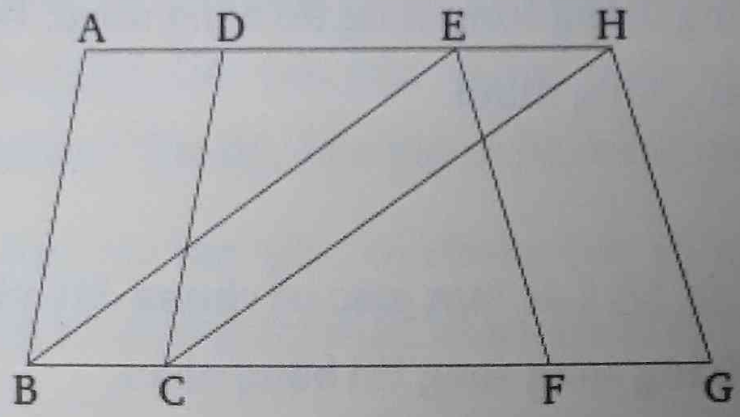
Như vậy, các hình bình hành có chung cạnh đáy và nằm giữa hai đường thẳng song song thì bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.



Do ABCD là hình bình hành nên AD bằng BC [MĐ. 1.34]. Tương tự, EF cũng bằng BC. Do vậy, AD cũng bằng EF. Và DE là cạnh chung, nên đoạn thẳng tổng AE bằng đoạn thẳng tổng DF. Và AB cũng bằng CD. Nên cặp cạnh EA, AB tương ứng bằng cặp cạnh FD, DC. Và góc ngoài FDC bằng góc trong EAB [MĐ. 1.29]. Do vậy, đáy EB bằng đáy FC và tam giác EAB bằng DFC [MĐ. 1.4]. Trừ tam giác DEG khỏi hai tam giác này thì hình thang còn lại ABGD bằng hình thang còn lại EGCF. Lại thêm tam giác GBC vào hai hình thang này. Như vậy, hình bình hành tổng ABCD bằng hình bình hành tổng EBCF.

Như vậy, các hình bình hành có chung cạnh đáy và nằm giữa hai đường thẳng song song thì bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 36:</u> Các hình bình hành có đáy bằng nhau và nằm giữa hai đường thẳng song song thì bằng nhau.



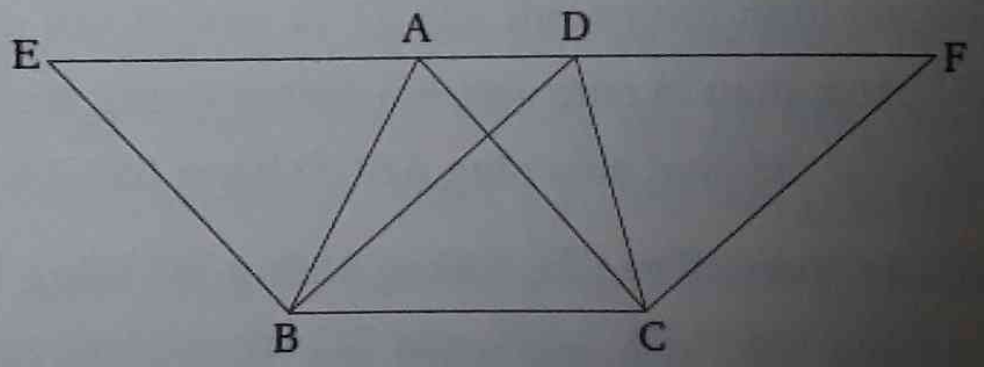
Cho hai hình bình hành ABCD và EFGH với các đáy BC và FG bằng nhau và nằm giữa hai đường thẳng song song AH và BG. Có thể phát biểu rằng ABCD bằng EFGH.

Nối các đoạn BE và CH. Không những BC bằng FG mà FG cũng bằng EH [MĐ. 1.34], nên BC cũng bằng EH. Hai đoạn thẳng này còn song song với nhau và EB và HC nối các điểm mút của chúng. Nhưng các đoạn thẳng, nối các đầu mút cùng một phía của các đoạn thẳng song song và bằng nhau, sẽ song song và bằng nhau [MĐ. 1.33], cho nên EB và HC cũng bằng nhau và song song với nhau. Do vậy EBCH là hình bình hành [MĐ. 1.34], và bằng hình bình hành ABCD do có đáy chung BC và nằm giữa hai đường thẳng song song BC và AH [MĐ. 1.35]. Tương tự, EFGH cũng bằng EBCH

[MĐ. 1.34]. Do vậy hình bình hành ABCD cũng bằng hình bình hành EFGH.

Như vậy, các hình bình hành có đáy bằng nhau và nằm giữa hai đường thẳng song song thì bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 37:</u> Các tam giác có chung đáy và nằm giữa hai đường thẳng song song thì bằng nhau.



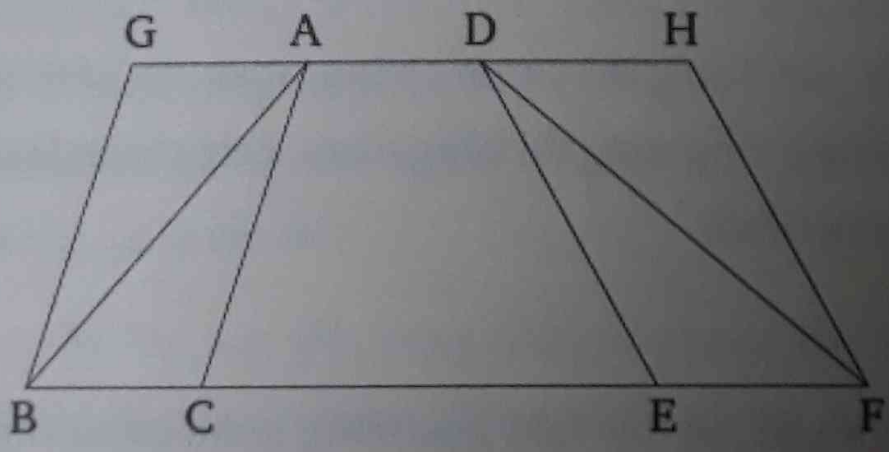
Gọi ABC và DBC là các tam giác có chung đáy BC, và nằm giữa hai đường thẳng song song AD và BC. Có thể phát biểu rằng tam giác ABC bằng tam giác DBC.

Kéo dài AD về hai hướng tới E và tới F, từ B vẽ đường BE đi qua B và song song với CA [MĐ. 1.31], và vẽ từ điểm C đường CF song song với BD [MĐ. 1.31]. Các hình EBCA và DBCF đều là hình bình hành và bằng nhau. Vì chúng có chung đáy BC và nằm giữa hai đường thẳng song song BC

và EF [MĐ. 1.35]. Và tam giác ABC là một nửa của hình bình hành EBCA. Vì đường chéo AB cắt EBCA làm hai phần bằng nhau [MĐ. 1.34]. Và tam giác DBC là một nửa của hình bình hành DBCF. Vì đường chéo DC cắt đôi hình bình hành DBCF [MĐ. 1.34]. Các nửa của những phần bằng nhau thì cũng bằng nhau.[15] Do đó, tam giác ABC bằng tam giác DBC.

Như vậy, các tam giác có chung đáy và nằm giữa hai đường thẳng song song thì bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 38:</u> Các tam giác có đáy bằng nhau và nằm giữa hai đường thẳng song song thì bằng nhau.



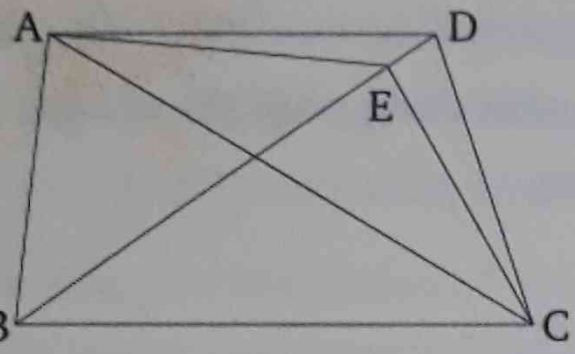
15 Các nửa của những phần bằng nhau thì cũng bằng nhau: đây là một tiên đề bổ sung.

Cho ABC và DEF là các tam giác có các đáy BC và EF bằng nhau, và nằm giữa hai đường thẳng song song BF và AD. Có thể phát biểu rằng tam giác ABC bằng tam giác DEF.

Kéo dài AD về hai hướng tới G và tới H, từ điểm B vẽ đoạn BG song song với CA [MĐ. 1.31], và qua F vẽ đường FH song song với ED [MĐ. 1.31]. Từ đó, GBCA và DEFH là các hình bình hành. Và hình bình hành GBCA bằng hình DEFH. Vì các hình này có các cạnh đáy BC và EF bằng nhau và nằm giữa hai đường thẳng song song BF và GH [MĐ. 1.36]. Và tam giác ABC là một nửa của hình bình hành GBCA. Vì đường chéo AB cắt GBCA làm hai phần bằng nhau [MĐ. 1.34]. Và tam giác FED là một nửa của hình bình hành DEFH. Vì đường chéo DF cắt DEFH làm hai phần bằng nhau. Các nửa của những phần bằng nhau thì cũng bằng nhau. Do đó, các tam giác ABC và DEF có diện tích bằng nhau.

Vậy các tam giác có đáy bằng nhau và nằm giữa hai đường thẳng song song thì bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 39:</u> Các tam giác bằng nhau có chung đáy và nằm cùng phía thì sẽ nằm giữa hai đường thẳng song song



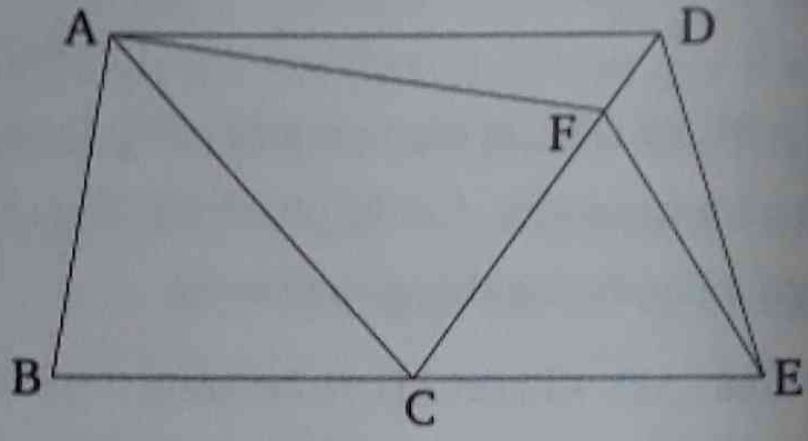
Gọi ABC và DBC là các tam giác bằng nhau, có chung đáy BC và nằm cùng phía. Có thể phát biểu rằng các tam giác này nằm giữa hai đường thẳng song song.

Nối đoạn AD. Khi đó AD và BC song song với nhau.

Vì, nếu không như vậy, từ điểm A vẽ đường AE song song với BC [MĐ. 1.31], và nối đoạn EC. Tam giác ABC bằng tam giác EBC. Vì chúng có đáy chung BC và nằm giữa hai đường thẳng song song [MĐ. 1.37]. Nhưng tam giác ABC bằng tam giác DBC. Do vậy, tam giác DBC bằng tam giác EBC, cái lớn hơn bằng cái nhỏ hơn. Điều này là không thể. Do đó, AE không song song với BC. Tương tự, có thể chứng minh không có đường nào ngoài AD có tính chất này. Do vậy, AD song song với BC.

Như vậy, các tam giác bằng nhau có chung đáy và nằm cùng phía thì sẽ nằm giữa hai đường thẳng song song. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 40[16]**: Các tam giác bằng nhau có các đáy bằng nhau và nằm cùng phía thì sẽ nằm giữa hai đường thẳng song song.**



Gọi ABC và CDE là các tam giác bằng nhau, có các đáy BC và CE bằng nhau, và nằm cùng một phía. Có thể phát biểu rằng các tam giác này nằm giữa hai đường thẳng song song.

Nối AD. Khi đó AD song song với BE.

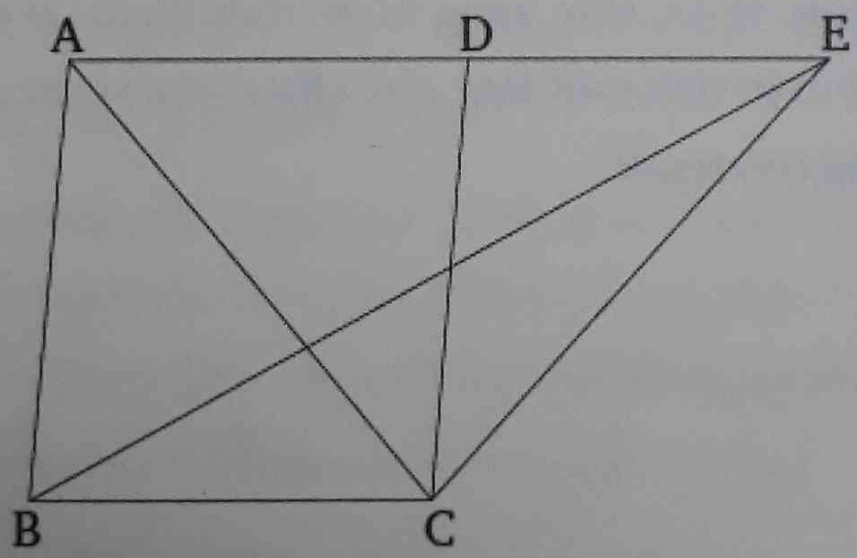
Vì nếu không như vậy, từ điểm A vẽ đường AF song song với BE [MĐ. 1.31], và nối đoạn FE. Tam giác ABC bằng tam giác FCE. Vì chúng có các đáy BC và CE bằng nhau và nằm giữa hai đường thẳng song song BE và AF [MĐ. 1.38]. Nhưng tam giác ABC bằng tam giác DCE. Cho nên tam giác DCE cũng bằng tam giác FCE, cái lớn hơn bằng cái nhỏ hơn.

16 Toàn bộ mệnh đề này được Heiberg cho là đã được, không ít thì nhiều, chép thêm vào văn bản gốc.

Điều này là không thể. Do đó, AF không song song với BE. Tương tự, có thể chứng minh không có đường nào ngoài AD có tính chất này. Do vậy, AD song song với BE.

Như vậy, các tam giác bằng nhau có các đáy bằng nhau và nằm cùng phía thì sẽ nằm giữa hai đường thẳng song song. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 41:</u> Nếu một hình bình hành có chung đáy với một tam giác, và các hình này cùng nằm giữa hai đường thẳng song song, thì hình bình hành sẽ gấp đôi (diện tích) hình tam giác.

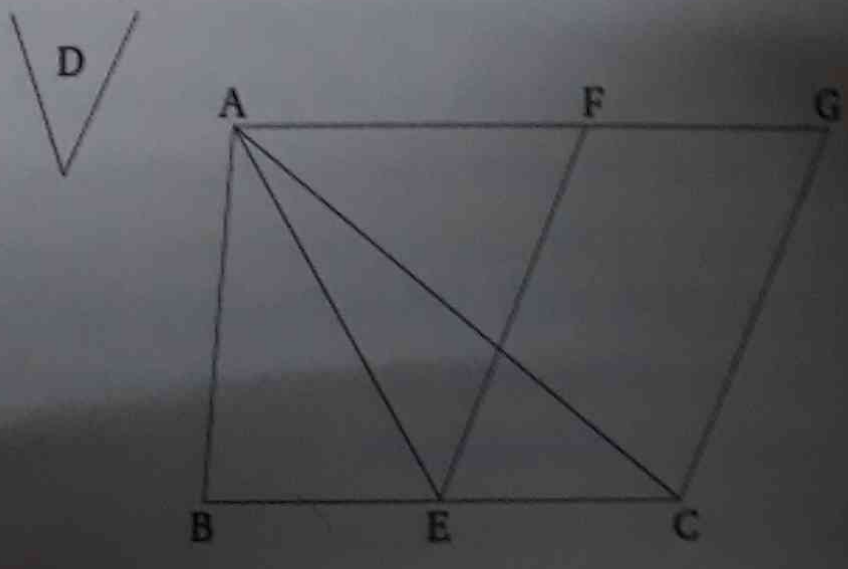


Cho hình bình hành ABCD, có chung đáy BC với tam giác EBC, và cho chúng cùng nằm giữa hai đường thẳng song song BC và AE. Có thể phát biểu rằng (diện tích) hình bình hành ABCD gấp đôi hình tam giác BEC.

Nối đoạn AC. Tam giác ABC bằng tam giác EBC. Vì chúng có đáy chung BC và cùng nằm giữa hai đường thẳng song song BC và AE [MĐ. 1.37]. Vì đường chéo AC chia hình bình hành ABCD thành hai phần bằng nhau, nên diện tích ABCD gấp đôi (diện tích) tam giác ABC [MĐ. 1.34]. Do đó, hình bình hành ABCD cũng gấp đôi tam giác EBC.

Như vậy, nếu một hình bình hành có chung đáy với một hình tam giác, và các hình này cùng nằm giữa hai đường thẳng song song, thì hình bình hành sẽ gấp đôi (diện tích) hình tam giác. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 42:</u> Hãy dựng hình bình hành có diện tích bằng với diện tích một tam giác cho trước và có góc bằng góc thẳng cho trước.

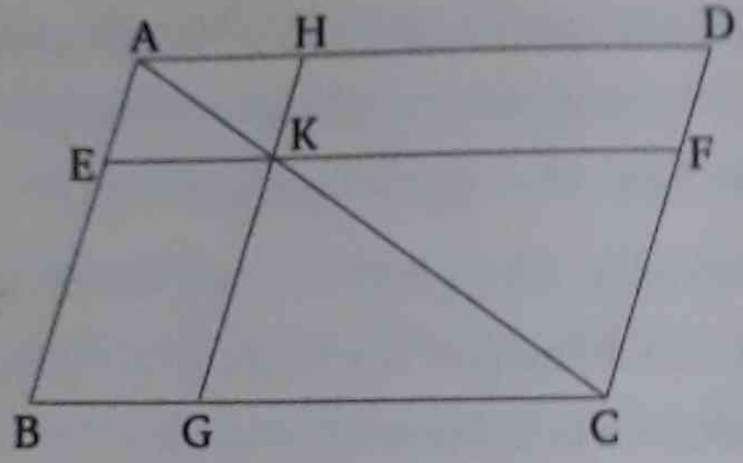


Gọi ABC là tam giác cho trước, và D là góc thẳng cho trước. Yêu cầu dựng hình bình hành có diện tích bằng diện tích tam giác ABC và có góc bằng góc thẳng D.

Chia đôi đoạn BC tại E [MĐ. 1.10], và nối AE. Từ điểm E dựng góc CEF bằng góc D và nằm trên đường EC [MĐ. 1.23]. Từ điểm A dựng AG song song với EC [MĐ. 1.31], và từ điểm C dựng CG song song với EF [MĐ. 1.31]. Do vậy, FECG là một hình bình hành. Và vì BE bằng EC, tam giác ABE cũng bằng tam giác AEC. Vì chúng có đáy bằng nhau và nằm giữa hai đường thẳng song song BC và AG [MĐ. 1.38]. Do đó, tam giác ABC gấp đôi (diện tích) tam giác AEC. Hình bình hành FECG cũng gấp đôi (diện tích) tam giác AEC. Vì nó có chung đáy (với AEC) và nằm giữa hai đường thẳng song song (như AEC) [MĐ. 1.41].

Như vậy, đã dựng được hình bình hành FECG, bằng (diện tích) tam giác ABC. Hình FECG cũng có góc CEF bằng góc D cho trước. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 43:</u> Với bất kỳ hình bình hành nào, các phần bù của các hình bình hành chia chung đường chéo thì bằng nhau.

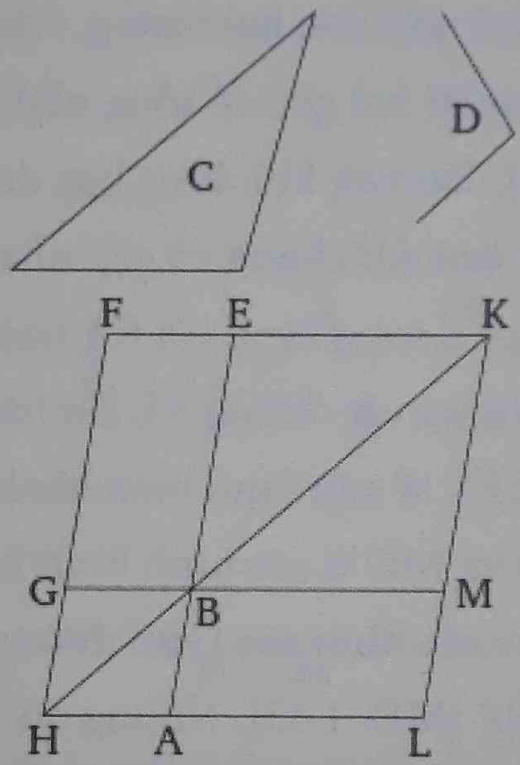


Cho hình bình hành ABCD có AC là đường chéo. Và gọi EH và FG là các hình bình hành chia chung AC, và BK và KD được gọi là các phần bù (với) AC. Có thể phát biểu rằng phần bù BK bằng với phần bù KD.

Vì ABCD là hình bình hành và AC là đường chéo, nên tam giác ABC bằng tam giác ACD [MĐ. 1.34]. Cũng thế, vì EH là hình bình hành, và AK là đường chéo của hình bình hành này, nên tam giác EAK và bằng tam giác AHK [MĐ. 1.34]. Với cùng lý do, tam giác KGC bằng tam giác KFC. Do đó, vì tam giác AEK bằng tam giác AHK, và KFC bằng KGC, tam giác AEK cộng KGC bằng tam giác AHK cộng KFC. Và tam giác tổng ABC cũng bằng tam giác tổng ADC. Nên còn lại phần bù BK bằng phần bù KD.

Do vậy, với bất kỳ hình bình hành nào, các phần bù của các hình bình hành chia chung đường chéo thì bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 44:</u> Hãy dựng một hình bình hành có (diện tích) bằng một tam giác cho trước, có (cạnh) bằng một đoạn thẳng cho trước và có (góc) bằng một góc thẳng cho trước.



Gọi AB là đoạn thẳng cho trước, C là tam giác cho trước, và D là góc cho trước. Yêu cầu dựng một hình bình hành bằng tam giác C cho trước, dựa vào đoạn AB cho trước và có góc bằng góc D cho trước.

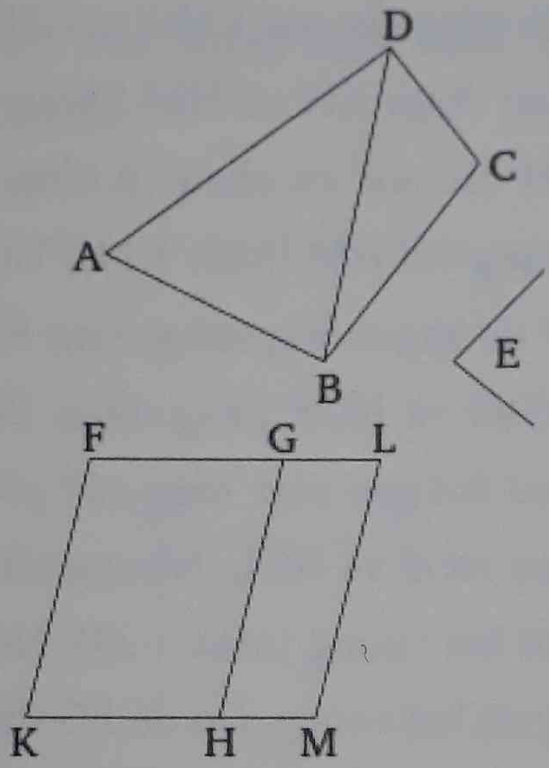
Dựng được hình BEFG từ góc EBG và góc này bằng góc D [MĐ. 1.42]. Và dựng sao cho BE thẳng hàng với AB.[17]

17 Có thể dựng nên và chứng minh được bằng cách sử dụng các MĐ. 1.3, 1.23 và 1.31.

Và kéo dài FG tới H, rồi qua A vẽ AH song song với BG hoặc EF [MĐ. 1.31], và nối đoạn HB. Vì đường thẳng HF cắt qua các đường thẳng song song AH và EF, nên tổng các góc AHF và HFE sẽ bằng hai (góc) vuông [MĐ. 1.29]. Do đó, tổng các góc BHG và GFE sẽ nhỏ hơn hai vuông. Các đường thẳng khi kéo dài đến vô cực từ hai góc có tổng nhỏ hơn hai vuông sẽ gặp nhau [ĐĐ. 5]. Do vậy, khi được kéo dài thì HB và FE sẽ gặp nhau. Giả sử kéo dài chúng và gặp nhau, tại điểm K. Từ điểm K vẽ đường KL song song với EA hoặc FH [MĐ. 1.31]. Kéo dài HA và GB tới cắt đường KL lần lượt tại các điểm M và L. Như vậy HLFK là một hình bình hành, và HK là đường chéo của nó. AG và ME là các hình bình hành, và LB và BF là các phần bù của các hình này (với) đường chéo chung HK. Do đó LB bằng BF [MĐ. 1.43]. Nhưng do BF bằng tam giác C. Nên LB cũng cũng bằng C [MĐ. 1.15], nhưng góc GBE bằng góc D, nên góc ABM cũng bằng góc D.

Như vậy, hình bình hành LB bằng với (diện tích) tam giác C cho trước, có cạnh bằng đoạn AB cho trước, và góc ABM bằng với góc D cho trước. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 45:</u> Hãy dựng một hình bình hành bằng (diện tích) của một đa giác thẳng cho trước và có góc bằng một góc thẳng cho trước.



Gọi ABCD là đa giác[18] cho trước và E là một góc thẳng cho trước. Yêu cầu dựng một hình bình hành có diện tích bằng diện tích của ABCD và có góc bằng góc E cho trước.

Nối đoạn DB, tại góc HKF, bằng với góc E, dựng hình bình hành FH có diện tích bằng diện tích tam giác ABD [MĐ. 1.42]. Và từ đoạn GH dựng hình bình hành GM bằng tam giác DBC và có góc GHM bằng góc E [MĐ. 1.44]. Do góc E đều bằng với các góc HKF và GHM, nên các góc HKF

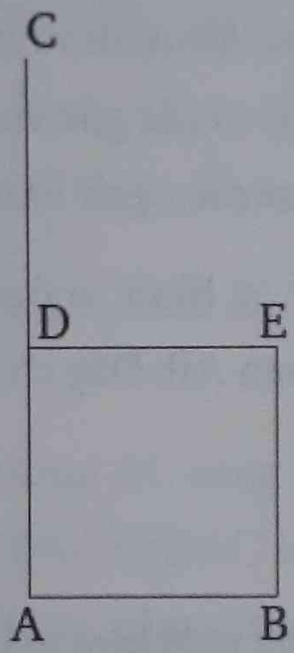
18 Cách chứng minh này chỉ áp dụng cho hình bốn cạnh (tứ giác). Tuy nhiên mở rộng chứng minh cho đa giác là đơn giản.

và GFM là bằng nhau. Cộng thêm góc KHG vào cả hai góc này, có tổng cặp góc FKH và KHG bằng với tổng cặp góc KHG và GHM. Tổng của FKH và KHG bằng hai (góc) vuông [MĐ. 1.29], do đó tổng cặp góc KHG và GHM cũng bằng hai vuông. Do vậy hai đoạn KH và HM không nằm cùng phía, tạo ra tại điểm H các góc kề nhau có tổng bằng hai vuông. Nên KH thẳng hàng với HM [MĐ. 1.14]. Và do đường thẳng HG, cắt qua các đường thẳng song song KM và FG, tạo ra các góc so le MHG và HGF bằng nhau [MĐ. 1.29]. Cộng thêm HGL vào cả hai góc này. Tổng các góc MHG và HGL bằng tổng các góc HGF và HGL. Nhưng tổng các góc MHG và HGL bằng với hai vuông [MĐ. 1.29]. Nên, tổng HGF và HGL cũng bằng với hai vuông. Do đó FG thẳng hàng với GL [MĐ. 1.14]. Và do FK song song và bằng với HG [MĐ. 1.34], và HG cũng song song và bằng với ML [MĐ. 1.30].Và đường thẳng FK cũng song song và bằng với ML [MĐ. 1.30]. Và các đường thẳng KM và FL nối các đầu mút của các đường thẳng này. Nên KM và FL cũng song song và bằng nhau [MĐ. 1.33]. Như vậy, KFLM là một hình bình hành. Và do tam giác ABD bằng (diện tích) hình FH và DBC bằng (diện tích) hình GM, nên diện tích tổng hình đa giác ABCD bằng diện tích hình bình hành tổng KFLM.

Như vậy, hình bình hành KFML bằng hình đa giác

ABCD cho trước, đã được dựng trên góc FKM bằng với góc E cho trước. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 46:</u> Hãy dựng một hình vuông trên một đoạn thẳng cho trước.



Gọi AB là đoạn cho trước. Yêu cầu dựng một hình vuông trên đoạn AB.

Từ điểm A vẽ đường AC vuông góc với AB [MĐ. 1.11], và lấy đoạn AD bằng với AB [MĐ. 1.3]. Qua điểm D vẽ đường DE song song với AB [MĐ. 1.31], và qua điểm B vẽ đường BE song song với AD [MĐ. 1.31]. Nên, ADBE là một hình bình hành. AB bằng DE và AD bằng BE [MĐ. 1.34]. Nhưng do AB bằng AD. Nên cả bốn cạnh BA, AD, DE và EB bằng nhau.

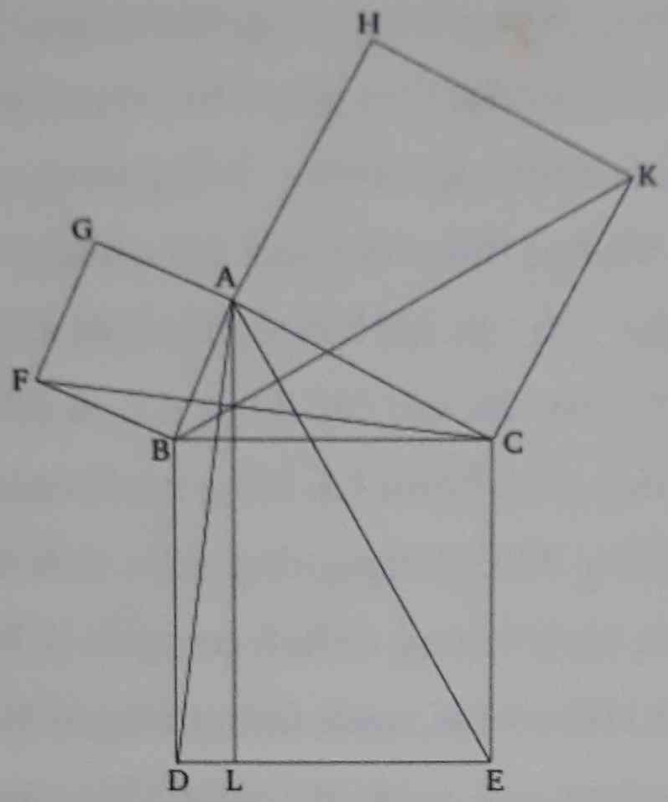
Như vậy hình bình hành ADEB có các cạnh bằng nhau. Có thể phát biểu rằng hình này có các góc vuông. Do AD cắt qua các đường thẳng song song AB và DE, nên tổng các góc BAD và ADE bằng hai (góc) vuông [MĐ. 1.29]. Nhưng BAD là góc vuông. Nên ADE cũng là góc vuông. Trong hình bình hành thì các góc đối và các cạnh đối bằng nhau theo cặp [MĐ. 1.34]. Nên các góc đối ABE và BED cũng là góc vuông. Do vậy, ADEB là tứ giác có các góc vuông. Và cũng đã chứng minh được, là tứ giác có các cạnh bằng nhau.

Như vậy, ADBE là hình vuông [ĐN.1.22]. Và hình vuông này nằm trên đoạn AB. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 47:</u> Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh chắn góc vuông bằng tổng các bình phương của các cạnh góc vuông.

Gọi ABC là tam giác vuông với góc BAC là góc vuông. Có thể phát biểu rằng bình phương của BC bằng tổng các bình phương của các cạnh BA và AC.

Dựng các hình vuông BDEC trên cạnh BC, các hình vuông GB và HC tương ứng trên các cạnh AB và AC [MĐ. 1.46].



Qua điểm A vẽ đường AL song song với BD hoặc CE [MĐ. 1.31]. Do các góc BAC và BAG là các góc vuông, và do các đoạn AC và AG không nằm cùng phía, tạo với đường thẳng BA, tại điểm A, các góc kề nhau có tổng bằng hai (góc) vuông. Nên CA thẳng hàng với AG [MĐ. 1.14]. Vì cùng lý do, BA thẳng hàng với AH. Và vì DBC bằng FBA (vì cả hai đều là góc vuông), cộng ABC vào cả hai góc này. Thì góc tổng DBA bằng góc tổng FBC. Và do DB bằng BC và FB bằng BA, nên cặp DB, BA lần lượt bằng cặp CB, BF. Và góc DBA bằng góc FBC. Nên đáy AD bằng đáy FC và tam giác ABD bằng tam giác FBC [MĐ. 1.4]. Hình bình hành BL gấp đôi (diện tích) tam giác ABD. Vì có chung đáy BD và cùng nằm giữa

một cặp đường thẳng song song BD và AL [MD 1.41]. Và hình vuông GB gấp đôi tam giác FBC vì có chung đáy FB và cùng nằm giữa một cặp đường thẳng song song FB và GC [MĐ. 1.41]. Những thứ cùng gấp đôi những thứ bằng nhau thì bằng nhau.[19] Do vậy, hình bình hành BL bằng hình vuông GB. Tương tự như vậy, nối các đoạn AE và BK, có thể chứng minh hình hình bình hành CL bằng hình vuông HC. Do đó, hình vuông tổng BDCE bằng tổng diện tích hai hình vuông GB và HC. Và hình vuông BDCE có cạnh là BC, và các hình vuông GB và HC có các cạnh tương ứng là BA và AC. Như vậy, bình phương của cạnh BC bằng tổng các bình phương của các cạnh BA và AC.

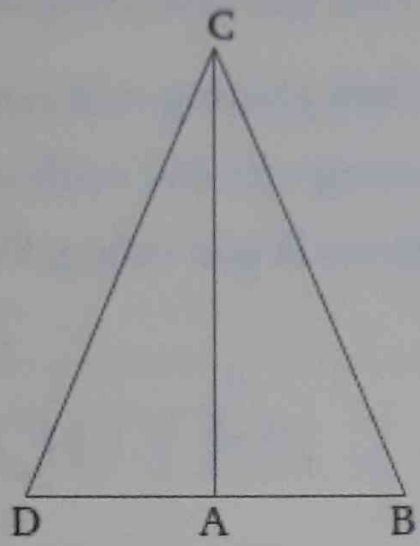
Như vậy, trong tam giác vuông, bình phương của cạnh chắn góc vuông bằng tổng các bình phương của các cạnh góc vuông. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 48:</u> Nếu bình phương một cạnh của một tam giác bằng tổng bình phương của các cạnh còn lại thì góc nằm giữa hai cạnh còn lại này là góc vuông.

Cho bình phương một cạnh, BC, của tam giác ABC bằng tổng bình phương của các cạnh BA và AC. Có thể phát

19 Những thứ cùng gấp đôi những thứ bằng nhau thì bằng nhau: đây là một tiên đề bổ sung.

biểu rằng BAC là góc vuông.



Từ điểm A vẽ đoạn AD vuông góc với đoạn AC [MĐ. 1.11], và lấy đoạn AD bằng BA [MĐ. 1.3], rồi nối đoạn DC. Do DA bằng AB, nên bình phương DA cũng bằng bình phương AB[20]. Thêm bình phương của AC vào cả hai giá trị này, thì tổng các bình phương của DA và AC bằng tổng các bình phương của BA và AC. Nhưng do bình phương của DC bằng tổng các bình phương của DA và AC. Vì DAC là góc vuông [MĐ. 1.47]. Nhưng bình phương cạnh BC bằng tổng bình phương của các cạnh BA và AC. Vì đây là giả thiết. Do vậy bình phương của DC bằng bình phương của BC. Vậy nên cạnh DC bằng BC. Và do DA bằng AB, cạnh AC là chung, nên cặp cạnh DA, AC bằng cặp cạnh BA, AC. Đáy DC bằng

20 Ở đây đã dùng một tiên đề bổ sung, rằng bình phương của những thứ bằng nhau thì cũng bằng nhau. Sau này tiên đề đảo cũng được sử dụng.

đáy BC. Do đó, góc DAC bằng BAC [MĐ. 1.8]. Nhưng góc DAC là góc vuông. Nên góc BAC cũng là góc vuông.

Như vậy, nếu bình phương một cạnh của một tam giác bằng tổng bình phương của các cạnh còn lại thì góc nằm giữa hai cạnh còn lại này là góc vuông. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

QUYỂN 2

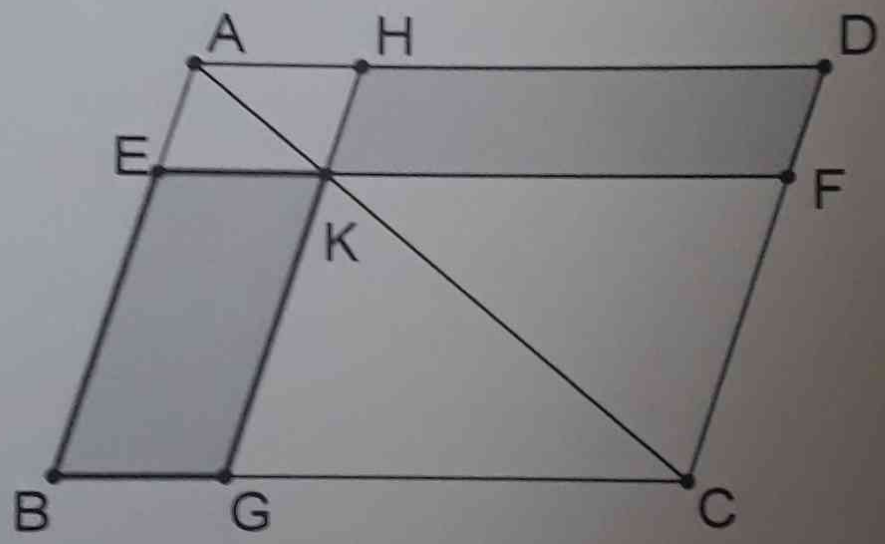
Cơ sở của Đại số Hình học[01]

01 Geometric Algebra, là thuật ngữ để chỉ cho một bộ phận toán học sơ cấp tương đối phát triển ở Hy Lạp cổ đại vào thời trước khi Euclid viết bộ sách này. Trong đó người ta dùng các chữ cái để kí hiệu cho các đại lượng được mô tả bởi các đối tượng hình học, như (độ dài) đoạn thẳng, hay (diện tích) hình chữ nhật chẳng hạn. Nhờ đó người ta có thể thực hiện các phép toán đại số và giải phương trình bậc không quá hai thông qua các phép dựng hình. Ngày nay, thuật ngữ này còn mang những nghĩa khác. (ND)

Định nghĩa

1. Một hình bình hành bất kỳ được gọi là hình chữ nhật[02] khi được tạo thành bằng hai đoạn thẳng vuông góc

2. Từ một hình bình hành lớn bất kỳ, lấy đi một hình bình hành bất kỳ trên đường chéo của nó, để lại hai phần bù[03] của hình bình hành nhỏ này, thì được (một hình) gọi là hình bình hành khuyết[04].



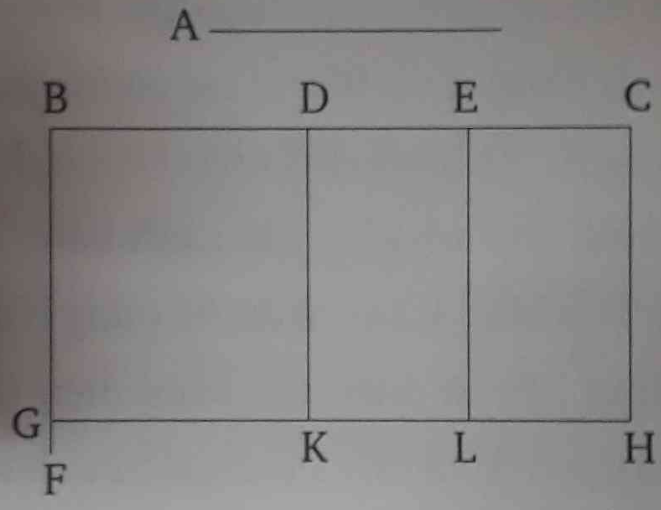
---

02 Đây không phải là định nghĩa cho một khái niệm mới, mà chỉ là xác định cách gọi tên cho một đối tượng đã được định nghĩa trước đó (ở đây là khái niệm "hình chữ nhật", xem ĐN. 1.22) trong những tình huống cụ thể xuất hiện rất nhiều lần trong Quyển 2 và về sau. (ND)

03 Xem MĐ. 1.43. (ND)

04 Nguyên văn là hình bình hành khuyết, đọc là \'nō-mən\ (âm g là âm câm). Hình bên dưới không có trong bản tiếng gốc Anh, chúng tôi dẫn lại để minh họa: ví dụ, hình bình hành khuyết EBCDH có được sau khi lấy AEKH khỏi ABCD. (ND)

Mệnh đề 1[05]**: Nếu có hai đoạn thẳng cho trước, mà một trong hai đoạn thẳng này được chia thành nhiều phần tùy ý, thì diện tích của hình chữ nhật được tạo thành bằng hai đoạn thẳng này (có diện tích) bằng tổng diện tích của các hình chữ nhật được tạo thành bởi đoạn thẳng không bị chia và từng phần của đoạn thẳng bị chia.**



Gọi A và BC là hai đoạn thẳng cho trước, và BC là đoạn thẳng bị chia một cách ngẫu nhiên bởi các điểm D và E. Có thể phát biểu rằng diện tích của hình chữ nhật có hai cạnh bằng A và BC bằng tổng diện tích của các hình chữ nhật có các cạnh bằng A và BD, A và DE, và cuối cùng là A và EC.

Dựng đoạn BF vuông góc với BC tại B [MĐ. 1.11], và dựng được điểm G trên BF sao cho BG bằng A [MĐ 1.3], từ G dựng được GH song song với BC [MĐ. 1.31]. Từ

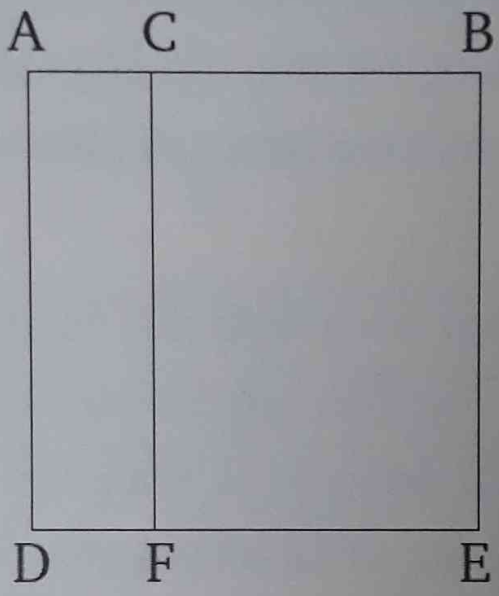
05 Mệnh đề này là dạng hình học của đồng nhất thức đại số: $a(b+c+d+\cdots)=ab+ac+ad+\cdots$.

D, E, và C lần lượt dựng được DK, EL, và CH cùng song song với BG [MĐ.1.31].

Khi đó, diện tích của hình chữ nhật BH bằng tổng diện tích của các hình chữ nhật BK, DL, và EH. Hình chữ nhật BH có diện tích bằng diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng A và BC, vì nó có các cạnh là GB và BC, mà BG bằng A. Hình chữ nhật BK có diện tích bằng diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng A và BD, vì nó có các cạnh là GB và BD, mà BG bằng A. Và hình chữ nhật DL có diện tích bằng diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng A và DE, do cạnh DK bằng BG [MĐ. 1.34] và do đó cũng bằng A. Tương tự, hình chữ nhật EH có diện tích bằng diện tích của hình chữ nhật có các cạnh A và EC. Do đó diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng A và BC bằng tổng diện tích của các hình chữ nhật có các cạnh bằng A và BD, A và DE, và cuối cùng là A và EC.

Vậy nếu có hai đoạn thẳng cho trước, mà một trong hai đoạn thẳng này được chia thành nhiều phần tùy ý, thì diện tích của hình chữ nhật được tạo thành bằng hai đoạn thẳng này (có diện tích) bằng tổng diện tích của các hình chữ nhật được tạo thành bởi đoạn thẳng không bị chia và từng phần của đoạn thẳng bị chia. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 2</u>[06]<u>:</u> Nếu một đoạn thẳng được chia thành hai phần một cách ngẫu nhiên thì tổng diện tích của các hình chữ nhật có các cạnh bằng cả đoạn thẳng đó và mỗi phần (của nó) bằng với diện tích hình vuông có cạnh là cả đoạn thẳng đó.



Gọi AB là đoạn thẳng được chia một cách ngẫu nhiên bởi điểm C. Có thể phát biểu rằng diện tích của hình chữ nhật có kích thước AB và BC cộng với diện tích của hình chữ nhật có kích thước BA và AC bằng diện tích hình vuông có cạnh AB. Dựng hình vuông ADEB trên đoạn AB [MĐ. 1.46], và từ điểm C dựng đoạn CF song song với AD hoặc BE [MĐ. 1.31].Khi đó, hình vuông AE có diện tích bằng tổng diện

06 Mệnh đề này là dạng hình học của đồng nhất thức đại số: $ab+ac=a^2$ nếu $a=b+c$.

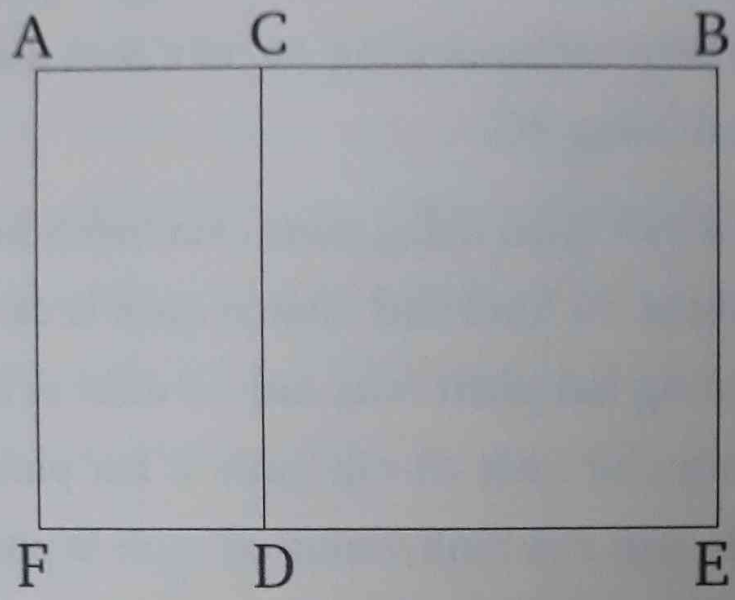
tích của các hình chữ nhật AFvà CE. Hình vuông AE chính là hình vuông có cạnh AB. Hình chữ nhật AF có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng BA và AC, vì nó có các cạnh là DA và AC, mà AD bằng AB. Hình chữ nhật CE có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật kích thước AB và BC, vì BE bằng AB. Do đó diện tích của hình chữ nhật có các cạnh AB và BC cộng với diện tích của hình chữ nhật có các cạnh BA và AC thì bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng AB.

Vậy nếu một đoạn thẳng được chia thành hai phần một cách ngẫu nhiên thì tổng diện tích của các hình chữ nhật có các cạnh bằng cả đoạn thẳng đó và mỗi phần (của nó) bằng với diện tích hình vuông có cạnh là cả đoạn thẳng đó. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 3[07]: Nếu một đoạn thẳng được chia thành hai phần một cách ngẫu nhiên thì hình chữ nhật có cạnh là cả đoạn thẳng đó và một trong hai phần (của nó) có diện tích bằng tổng diện tích hình chữ nhật có các cạnh là hai phần của đoạn thẳng và diện tích của hình vuông có cạnh là phần nói trên.

---

07 Mệnh đề này là dạng hình học của đồng nhất thức đại số: $(a+b)a=ab+a^2$.



Gọi AB là đoạn thẳng được chia một cách ngẫu nhiên bởi điểm C. Có thể phát biểu rằng diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BC bằng tổng diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng AC và CB và diện tích hình vuông có cạnh BC.

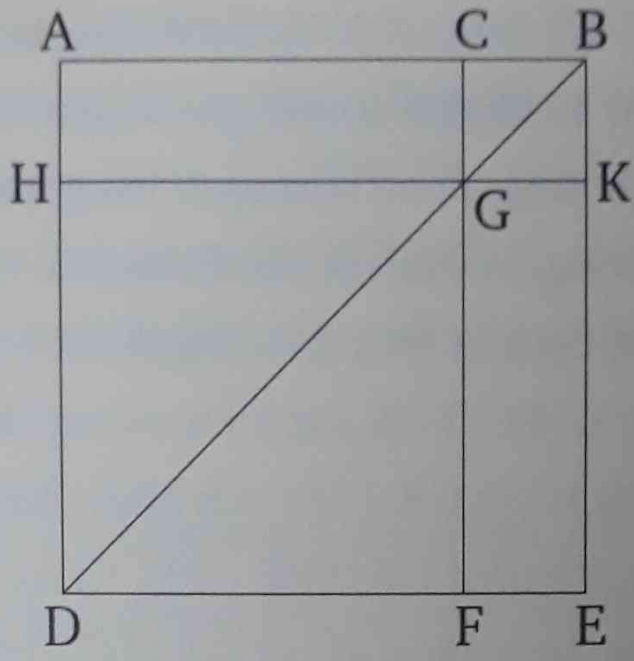
Dựng hình vuông CDEB trên đoạn CB [MĐ. 1.46], kéo dài ED đến F, từ điểm A dựng đoạn AF song song với CD hoặc BE. Khi đó, diện tích hình chữ nhật AE bằng tổng diện tích hình chữ nhật AD và diện tích của hình vuông CE. Hình chữ nhật AE có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BC, vì nó có các cạnh là AB và BE, mà BE bằng BC. Hình chữ nhật AD có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật có các cạnh AC và CB, do DC bằng CB. Còn DB là hình vuông có cạnh là CB. Như vậy diện tích của hình

chữ nhật có các cạnh bằng AB và BC bằng tổng diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng AC và CB và diện tích hình vuông có cạnh bằng BC.

Vậy nếu một đoạn thẳng được chia thành hai phần một cách ngẫu nhiên thì hình chữ nhậtcó cạnh là cả đoạn thẳng đó và một trong hai phần (của nó) có diện tích bằng tổng diện tích hình chữ nhật có các cạnh là hai phần của đoạn thẳng và diện tích của hình vuông có cạnh là phần nói trên. Đây là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 4:</u> Nếu một đoạn thẳng được chia một cách ngẫu nhiên thành hai phần thì diện tích của hình vuông có cạnh bằng cả đoạn thẳng đó sẽ bằng tổng diện tích của hai hình vuông có các cạnh bằng hai phần đó của đoạn thẳng, cộng với hai lần diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng hai phần đó.

Gọi AB là đoạn thẳng được chia một cách ngẫu nhiên bởi điểm C. Có thể phát biểu rằng diện tích hình vuông có cạnh AB bằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh là AC và CB, cộng với hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh là AC và CB.

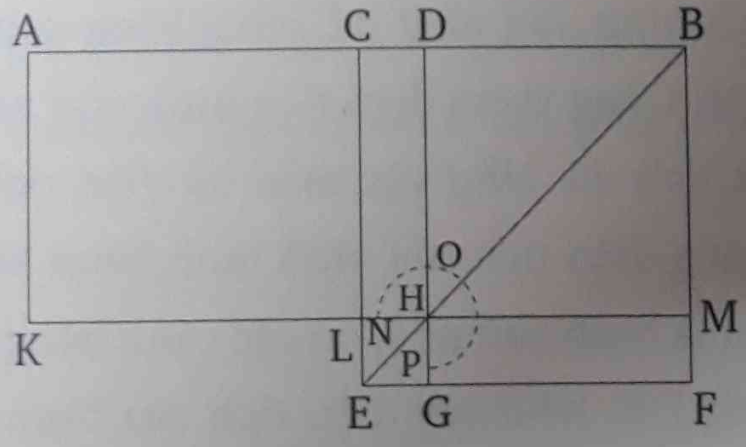


Dựng hình vuông ADEB trên đoạn AB [MĐ. 1.46], và nối đoạn BD, qua điểm C dựng đoạn thẳng CF song song với AD hoặc EB [MĐ. 1.31], qua điểm G dựng đoạn HK song song với AB hoặc DE [MĐ. 1.31]. Vì CF song song với AD, và BD cắt cả hai đoạn này cho nên góc CGB bằng góc đồng vị ADB [MĐ. 1.29]. Nhưng góc ADB bằng góc ABD vì cạnh BA bằng cạnh AD [MĐ. 1.5]. Như vậy góc CGB cũng bằng GBC. Vì vậy, cạnh BC bằng cạnh CG [MĐ. 1.6]. Nhưng CB bằng GK, và CG bằng KB [MĐ. 1.34]. Do đó GK cũng bằng KB. Vì vậy tứ giác CGKB có bốn cạnh bằng nhau. Có thể phát biểu rằng nó có các góc đều là góc vuông. Thật vậy, CG song song với BK [và đoạn CB cắt cả hai đoạn này] nên tổng các góc KBC và GCB bằng hai góc vuông [MĐ. 1.29]. Mà

KBC là một góc vuông. Do đó BCG cũng là một góc vuông. Vì vậy, các góc đối diện CGK và GKB cũng là các góc vuông [MĐ. 1.34]. Do đó CGKB có các góc là góc vuông. Và ở trên đã chứng minh rằng nó có bốn cạnh bằng nhau. Do vậy nó là một hình vuông, có cạnh là CB. Tương tự, HF cũng là một hình vuông, có cạnh là HG, đó cũng là hình vuông có cạnh bằng AC [MĐ. 1.34]. Vì vậy, các hình vuông HF và KC có các cạnh lần lượt là AC và CB. Diện tích hình chữ nhật AG bằng diện tích hình chữ nhật GE [MĐ. 1.43]. Và AG chính là hình chữ nhật có các cạnh bằng AC và CB, vì CG bằng CB. Do đó GE là hình chữ nhật có các cạnh bằng AC và CB. Từ đó suy ra tổng diện tích của hai hình chữ nhật AG và GE bằng hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AC và CB. Ở trên đã thấy HF và CK là các hình vuông có cạnh lần lượt là AC và CB. Như vậy tổng diện tích của bốn hình HF, CK, AG, và GE bằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh AC và BC và hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AC và CB. Trong thì, tổng diện tích của bốn hình HF, CK, AG, và GE lại bằng diện tích của hình vuông ADEB, là hình vuông có cạnh là AB. Như vậy diện tích hình vuông có cạnh AB bằng tổng diện tích của hai hình vuông có các cạnh bằng AC và CB và hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AC và CB.

Vậy nếu một đoạn thẳng được chia một cách ngẫu nhiên thành hai phần thì diện tích của hình vuông có cạnh bằng cả đoạn thẳng đó sẽ bằng tổng diện tích của hai hình vuông có các cạnh bằng hai phần đó của đoạn thẳng, cộng với hai lần diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng hai phần đó. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 5[08]: Nếu một đoạn thẳng được chia đều tại một điểm và chia không đều tại một điểm khác thì diện tích hình chữ nhật có các cạnh là hai phần không đều của đoạn thẳng đó cộng với diện tích hình vuông có cạnh là đoạn lệch giữa nửa đoạn thẳng đó và phần của đoạn thẳng khi chia không đều sẽ bằng diện tích của hình vuông có cạnh là nửa đoạn thẳng đó.



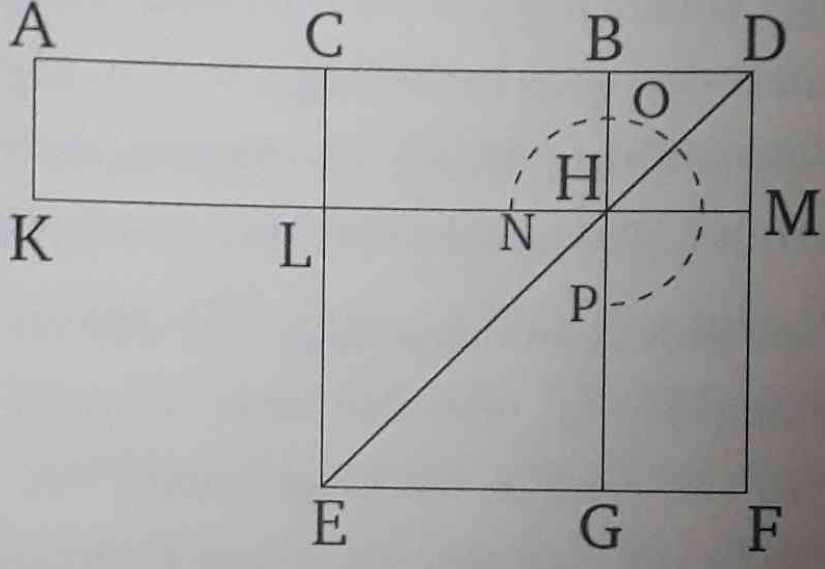
08 Mệnh đề này là dạng hình học của đồng nhất thức đại số: $ab+[(a+b)/2-b]^2=[(a+b)/2]^2$.

Gọi AB đoạn thẳng được chia đều tại C, và chia không đều tại D. Có thể phát biểu rằng diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DB cộng với diện tích hình vuông có cạnh CD thì bằng diện tích hình vuông có cạnh CB. Dựng hình vuông CEFB trên đoạn CB [MĐ. 1.46], nối đoạn BE và từ D dựng được đoạn thẳng DG song song với CE hoặc BF [MĐ. 1.31], và từ H dựng đoạn thẳng KM song song với AB hoặc EF [MĐ. 1.31], và từ A dựng đoạn thẳng AK song song với CL hoặc BM [MĐ. 1.31]. Diện tích của hình bình hành CH bằng diện tích hình bình hành bù HF [MĐ. 1.43]. Cộng thêm diện tích hình vuông DM vào cả hai diện tích trên. Như vậy toàn bộ diện tích hình chữ nhật CM bằng toàn bộ diện tích hình chữ nhật DF. Nhưng, diện tích hình chữ nhật CM bằng diện tích hình chữ nhật AL, do AC bằng CB [MĐ. 1.36]. Do đó diện tích hình chữ nhật AL cũng bằng diện tích hình chữ nhật DF. Cộng thêm diện tích hình chữ nhật CH vào cả hai diện tích đó. Như vậy toàn bộ diện tích hình chữ nhật AH bằng diện tích của hình bình hành khuyết NOP. Nhưng, AH là hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DB, do DH bằng DB. Như vậy diện tích của hình bình hành khuyết NOP bằng với diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DB. Cộng thêm diện tích của hình vuông LG

- cũng chính là diện tích hình vuông có cạnh bằng CD- vào cả hai diện tích đó. Như vậy tổng diện tích của hình bình hành khuyết NOP và diện tích hình vuông LG bằng tổng diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DB với diện tích hình vuông có cạnh CD. Tuy nhiên, tổng diện tích của hình bình hành khuyết NOP và diện tích hình vuông LG lại bằng toàn bộ diện tích của hình vuông CEFB, là hình vuông có cạnh bằng CB. Như vậy hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DB cộng với diện tích hình vuông có cạnh CD bằng diện tích hình vuông có cạnh CB.

Vậy nếu một đoạn thẳng được chia đều tại một điểm và chia không đều tại một điển khác thì diện tích hình chữ nhật có các cạnh là hai phần không đều của đoạn thẳng đó cộng với diện tích hình vuông có cạnh là đoạn lệch giữa nửa đoạn thẳng đó và phần của đoạn thẳng khi chia không đều sẽ bằng diện tích của hình vuông có cạnh là nửa đoạn thẳng đó. Đây chính là cần phải chứng minh.

Mệnh đề 6[09]: Nếu một đoạn thẳng được chia đôi và kéo dài thêm một đoạn thì diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng toàn bộ đoạn thẳng sau khi được kéo dài và đoạn kéo dài cộng với diện tích hình vuông có cạnh là nửa đoạn thẳng ban đầu sẽ bằng với diện tích hình vuông có cạnh là tổng của nửa đoạn thẳng ban đầu và đoạn kéo dài.



Gọi AB đoạn thẳng được chia đôi tại C, và BD là đoạn thẳng kéo dài. Có thể phát biểu rằng diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DB, cộng với diện tích hình vuông có cạnh bằng CB bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng CD.

Dựng hình vuông CEFD trên đoạn CD [MĐ. 1.46], nối đoạn DE, qua điểm B dựng đoạn thẳng BG song song với EC hoặc DF [MĐ. 1.31], qua điểm H dựng đoạn thẳng KM song

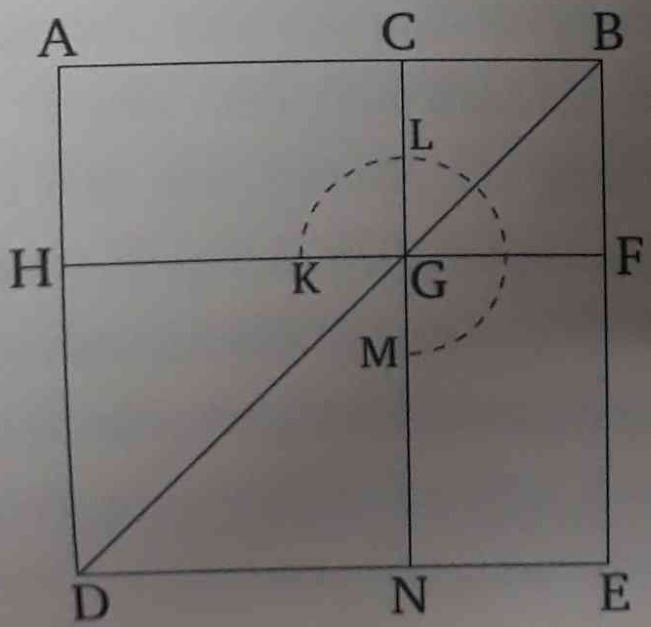
09 Mệnh đề này là dạng hình học của đồng nhất thức đại số: $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$.

song với AB hay EF [MĐ. 1.31]; cuối cùng, qua điểm A dựng đoạn thẳng AK song song với CL hoặc DM [MĐ. 1.31].

Khi đó, vì AC bằng CB nên diện tích hình chữ nhật AL cũng bằng diện tích hình chữ nhật CH [MĐ. 1.36]. Nhưng diện tích hình chữ nhật CH bằng diện tích hình chữ nhật HF [MĐ. 1.43]. Do đó diện tích hình chữ nhật AL cũng bằng diện tích hình chữ nhật HF. Cộng thêm diện tích hình chữ nhật CM vào cả hai diện tích này. Khi đó toàn bộ diện tích hình chữ nhật AM bằng với diện tích hình bình hành khuyết NOP. Nhưng AM là hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DB. Vì DM bằng DB, nên diện tích của hình bình hành khuyết NOP cũng bằng với diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DB. Cộng thêm diện tích hình chữ nhật LG, cũng bằng với diện tích hình vuông có cạnh bằng BC, vào cả hai diện tích trên. Khi đó diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DB cộng với diện tích hình vuông có cạnh bằng CB bằng diện tích của hình bình hành khuyết NOP cộng với diện tích hình vuông LG. Nhưng diện tích của hình bình hành khuyết NOP cộng với diện tích hình vuông LG sẽ bằng toàn bộ diện tích hình vuông CEFD, là hình vuông có cạnh bằng CD. Như vậy diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DB, cộng với diện tích hình vuông có cạnh bằng CB bằng diện tích hình vuông có cạnh CD.

Vậy nếu một đoạn thẳng được chia đôi và kéo dài thêm một đoạn thì diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng toàn bộ đoạn thẳng sau khi được kéo dài và đoạn kéo dài cộng với diện tích hình vuông có cạnh là nửa đoạn thẳng ban đầu sẽ bằng với diện tích hình vuông có cạnh là tổng của nửa đoạn thẳng ban đầu và đoạn kéo dài. Đây chính là điều phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 7:</u> Nếu một đoạn thẳng được chia thành hai phần một cách ngẫu nhiên thì tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh là đoạn thẳng đó và một trong hai phần (của đoạn thẳng) bằng hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh là đoạn thẳng đó và phần đoạn thẳng đã nói cộng với diện tích hình vuông có cạnh bằng phần đoạn thẳng còn lại.



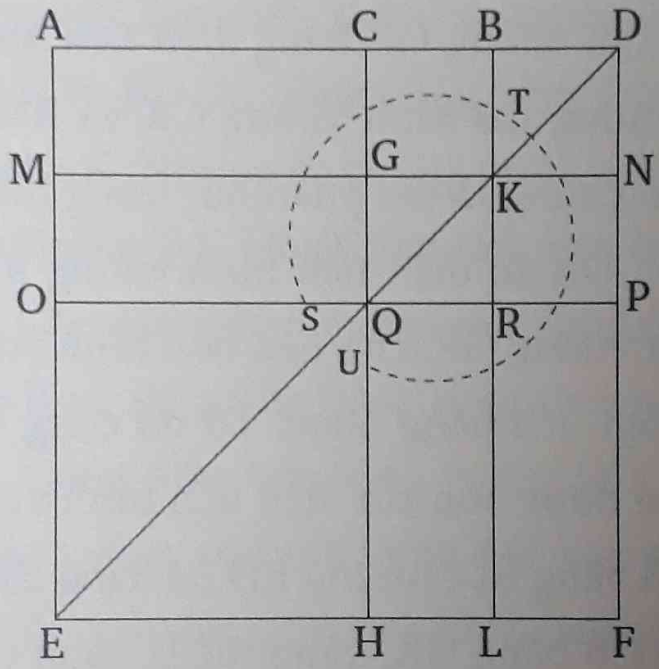
Gọi AB là đoạn thẳng được chia một cách ngẫu nhiên bởi điểm C. Có thể phát biểu rằng tổng của diện tích hai hình vuông có cạnh bằng AB và BC bằng hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BC cộng với diện tích hình vuông có cạnh bằng CA.

Dựng hình vuông ADEB trên đoạn AB [MĐ. 1.46], và dựng các phần còn lại của hình vẽ. Khi đó, diện tích hình chữ nhật AG bằng diện tích hình chữ nhật GE [MĐ. 1.43]. Cộng thêm diện tích hình vuông CF vào cả hai diện tích này. Như vậy diện tích của toàn bộ hình chữ nhật AF bằng diện tích của toàn bộ hình chữ nhật CE. Do đó diện tích hình chữ nhật AF cộng với diện tích hình chữ nhật CE bằng hai lần diện tích hình chữ nhật AF. Nhưng diện tích hình chữ nhật AF cộng với diện tích hình chữ nhật CE bằng diện tích của hình bình hành khuyết KLM cộng với diện tích hình vuông CF. Như vậy diện tích hình bình hành khuyết KLM cộng với diện tích hình vuông CF gấp đôi diện tích hình chữ nhật AF. Nhưng hai lần diện tích hình chữ nhật AF cũng chính là hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BC. Vì BF bằng BC. Nên diện tích của hình bình hành khuyết KLM cộng với diện tích hình vuông CF bằng hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh là AB và BC. Cộng thêm diện tích hình vuông DG, là hình vuông có cạnh

bằng AC vào cả hai diện tích trên. Khi đó tổng diện tích của hình bình hành khuyết KLM với diện tích các hình vuông BG và GD bằng hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BC cộng với diện tích hình vuông có cạnh bằng AC. Tuy nhiên, tổng diện tích của hình bình hành khuyết KLM với diện tích các hình vuông BG và GD bằng diện tích toàn bộ hình vuông ADEB cộng với diện tích hình vuông CF, tức là bằng tổng diện tích của hai hình vuông có các cạnh lần lượt là AB và BC. Do đó tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AB và BC bằng hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BC cộng với diện tích hình vuông có cạnh bằng CA.

Vậy nếu một đoạn thẳng được chia thành hai phần một cách ngẫu nhiên thì tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh là đoạn thẳng đó và một trong hai phần (của đoạn thẳng) bằng hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh là đoạn thẳng đó và phần đoạn thẳng đã nói cộng với diện tích hình vuông có cạnh bằng phần đoạn thẳng còn lại. Đây chính là điều cần phải chứng minh

Mệnh đề 8[10]: Nếu một đoạn thẳng được chia thành hai phần một cách ngẫu nhiên thì tổng của bốn lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng cả đoạn thẳng đó và một trong hai phần của nó và diện tích hình vuông có cạnh bằng phần đoạn thẳng còn lại bằng diện tích của hình vuông có các cạnh bằng đoạn thẳng là tổng của đoạn thẳng ban đầu và phần đoạn thẳng nhắc đến đầu tiên.



Gọi AB là đoạn thẳng được chia một cách ngẫu nhiên bởi điểm C. Có thể phát biểu rằng tổng của bốn lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BC với diện tích hình vuông có cạnh bằng AC bằng diện tích hình vuông có cạnh là tổng của AB và BC.

---

10 Mệnh đề này là dạng hình học của đồng nhất thức đại số: $4(a+b)a+b^2=[(a+b)+a]^2$.

Dựng đoạn BD từ AB kéo dài sao cho BD bằng BC [MĐ.1.3], và dựng hình vuông AEFD trên cạnh AD [MĐ.1.46], rồi dựng các phần còn lại của hình vẽ.

Khi đó, vì CB bằng BD, hơn nữa, CBGK [MĐ.1.43], và BD bằng KN [MĐ.1.34]. Cho nên GK bằng KN. Tương tự như thế, QR cũng bằng RP. Và vì BC bằng BD, GK bằng KN nên diện tích hình vuông CK bằng diện tích hình vuông KD, và diện tích hình vuông GR bằng diện tích hình vuông RN [MĐ.1.36]. Nhưng hai hình vuông CK và RN có diện tích bằng nhau, do chúng là các phần bù trong hình bình hành CP [MĐ.1.43]. Do đó diện tích hình vuông KD cũng bằng diện tích hình vuông GR, cho nên bốn hình vuông DK, CK, GR, RN có diện tích bằng nhau. Từ đó cộng bốn diện tích đó với nhau sẽ được bốn lần diện tích hình vuông CK. Một lần nữa, vì CB bằng BD, nhưng BD lại bằng BK, cũng tức là bằng CG - và CB bằng GK, cũng tức là bằng GQ – nên CG cũng bằng GQ. Và vì CG bằng GQ, QR bằng RP nên diện tích hình chữ nhật AG bằng diện tích hình chữ nhật MQ, và diện tích hình chữ nhật QL bằng diện tích hình chữ nhật RF [MĐ.1.36]. Nhưng diện tích hình chữ nhật MQ lại bằng diện tích hình chữ nhật QL bởi chúng đều là các phần bù trong hình bình hành ML [MĐ.1.43]. Vì thế, diện tích hình chữ nhật AG cũng bằng diện tích hình chữ nhật RF. Như vậy bốn

hình chữ nhật AG, MQ, QL, và RF có diện tích bằng nhau. Như vậy cộng bốn diện tích đó với nhau sẽ được bốn lần diện tích hình chữ nhật AG. Ở trên đã chứng minh rằng tổng diện tích của bốn hình vuông DK, CK, GR, RN bằng bốn lần diện tích hình vuông CK. Do đó diện tích của tám hình này cộng lại, cũng chính là diện tích của hình bình hành khuyết STU-bằng bốn lần diện tích hình chữ nhật AK. Và vì AK bằng BD nên bốn lần diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BD thì bằng cũng bằng bốn lần diện tích hình chữ nhật AK. Nhưng đã chứng minh được bốn lần diện tích hình chữ nhật AK bằng diện tích của hình bình hành khuyết STU. Cho nên bốn lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BD cũng bằng diện tích hình bình hành khuyết STU. Cộng diện tích hình vuông OH, cũng chính là diện tích hình vuông có cạnh bằng AC, vào cả hai diện tích nói trên. Khi đó, bốn lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BD cộng với diện tích hình vuông có cạnh bằng AC bằng với tổng của diện tích hình bình hành khuyết STU và diện tích hình vuông OH. Tuy nhiên, diện tích hình bình hành khuyết STU cộng với diện tích hình vuông OH lại bằng diện tích toàn bộ hình vuông AEFD, là hình vuông có cạnh bằng AD. Như vậy bốn lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BD cộng với diện tích hình vuông có cạnh

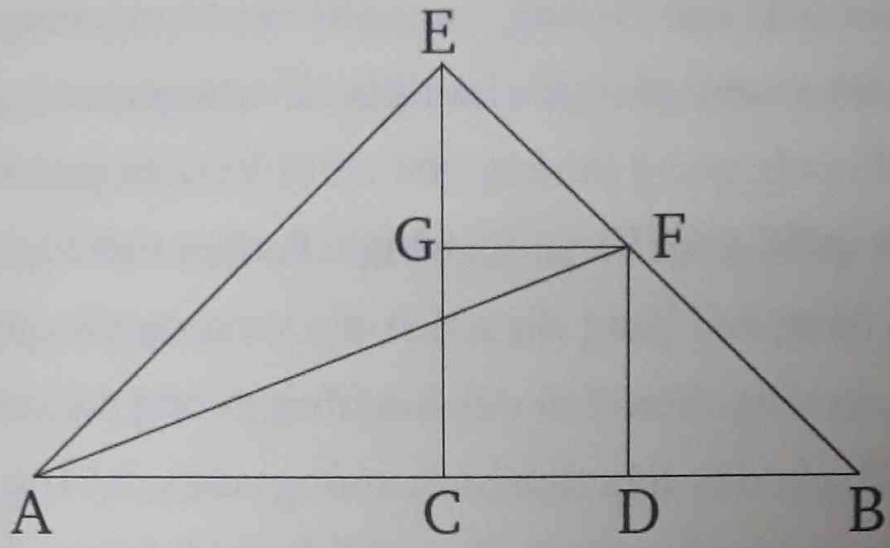
bằng AC bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng AD. Và BD bằng BC. Như vậy tổng của bốn lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BC với diện tích hình vuông có cạnh bằng AC bằng diện tích hình vuông có cạnh AD, là cạnh tổng của AB và BC.

Vậy nếu một đoạn thẳng được chia thành hai phần một cách ngẫu nhiên thì tổng của bốn lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng cả đoạn thẳng đó và một trong hai phần của nó và diện tích hình vuông có cạnh bằng phần đoạn thẳng còn lại bằng diện tích của hình vuông có các cạnh bằng đoạn thẳng là tổng của đoạn thẳng ban đầu và phần đoạn thẳng nhắc đến đầu tiên. Đây là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 9:</u> Nếu một đoạn thẳng được chia đều tại một điểm và chia không đều tại một điển khác thì tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh là hai phần không đều của đoạn thẳng bằng hai lần tổng diện tích hình vuông có cạnh là nửa đoạn thẳng đó và diện tích hình vuông có cạnh là phần lệch giữa nửa đoạn thẳng đó và một phần của nó khi chia không đều.

Gọi AB đoạn thẳng được chia đều tại C, và chia không đều tại D. Có thể phát biểu rằng tổng diện tích của hai hình

vuông có cạnh bằng AD và DB bằng hai lần tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh AC và CD.



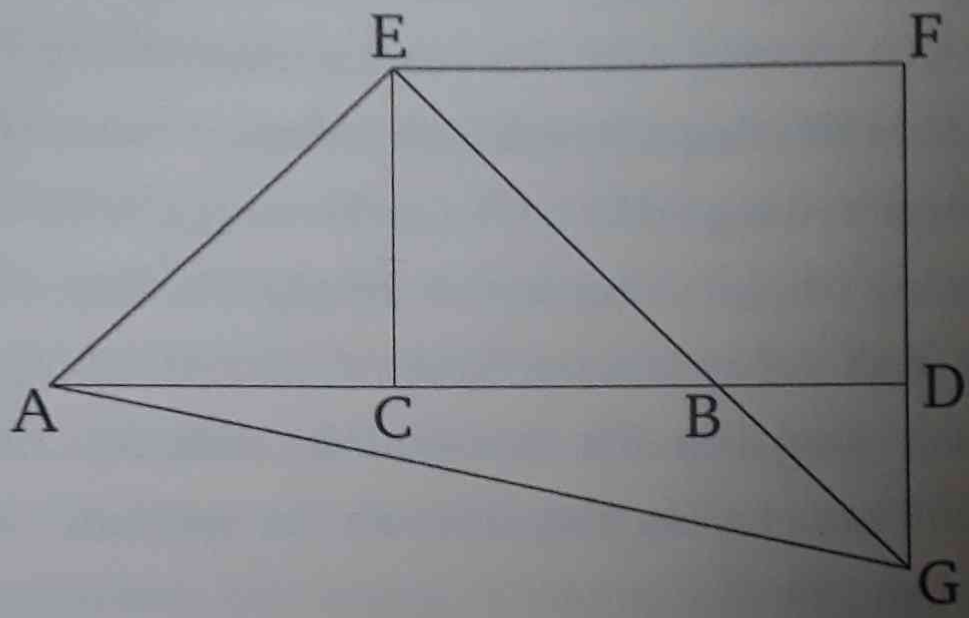
Dựng đoạn thẳng CE vuông góc với AB tại C [MĐ. 1.11], với AC bằng CB [MĐ. 1.3]; nối các đoạn EA và EB. Từ điểm D dựng đoạn thẳng DF song song với EC [MĐ. 1.31], vẽ FG đi qua điểm F song song với AB [MĐ. 1.31]. Nối đoạn AF. Khi đó, vì AC bằng CE nên góc EAC cũng bằng với (góc) AEC [MĐ. 1.5]. Và, trong tam giác AEC vì C là một góc vuông nên tổng của hai góc còn lại, EAC và AEC, bằng một góc vuông [MĐ. 1.32]. Và vì chúng bằng nhau nên mỗi góc CEA và CAE bằng một nửa góc vuông. Tương tự, mỗi góc CEB và EBC cũng là một nửa góc vuông. Như vậy góc AEB là một góc vuông. Vì GEF là một nửa góc vuông, và góc EGF là một góc vuông – vì bằng với góc đồng vị ECB [MĐ. 1.29] - nên góc còn lại EFG cũng là một nửa góc vuông [MĐ.

1.32]. Như vậy góc GEF bằng EFG. Cho nên cạnh EG bằng cạnh GF [MĐ. 1.6]. Một lần nữa, góc ở B bằng một nửa góc vuông và FDB là góc vuông – vì nó bằng với góc đồng vị ECB [MĐ 1.29] – nên góc còn lại BFD là nửa góc vuông [MĐ. 1.32]. Như vậy góc ở B bằng góc DFB. Vì thế cạnh FD bằng cạnh DB [MĐ. 1.6]. Và vì AC bằng CE, diện tích hình vuông có cạnh bằng AC bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng CE. Do đó tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AC và CE gấp đôi diện tích hình vuông có cạnh bằng AC. Và diện tích của hình vuông có cạnh bằng AE bằng tổng diện tích của các hình vuông có cạnh bằng AC và CE. Vì ACE là một góc vuông [MĐ. 1.47]. Như vậy diện tích hình vuông có cạnh EA gấp đôi diện tích hình vuông có cạnh AC. Một lần nữa, vì EG bằng GF nên diện tích hình vuông có cạnh EG bằng diện tích hình vuông có cạnh GF. Do đó tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh EG và GF gấp đôi diện tích hình vuông có cạnh GF. Và diện tích hình vuông có cạnh EF bằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng EG và GF [MĐ. 1.47]. Cho nên diện tích hình vuông có cạnh bằng EF thì gấp đôi diện tích hình vuông có cạnh GF. Và GF lại bằng CD [MĐ. 1.34]. Cho nên diện tích hình vuông có cạnh bằng EF gấp đôi diện tích hình vuông có cạnh bằng CD. Và diện tích hình vuông có cạnh bằng EA cũng gấp đôi diện tích hình

vuông có cạnh bằng AC. Như vậy tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AE và EF gấp đôi tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AC và CD. Và hình vuông cạnh bằng AF có diện tích bằng tổng diện tích hai hình vuông có cạnh bằng AE và EF, do AEF là một góc vuông [MĐ. 1.47]. Như vậy diện tích của hình vuông có cạnh bằng AF có diện tích gấp đôi tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AC và CD. Và tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AD và DF bằng diện tích hình vuông có cạnh AF, vì góc D là một góc vuông [MĐ. 1.47]. Do đó tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AD và DF gấp đôi tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AC và CD. Mà DF bằng DB. Do đó tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AD và DB bằng hai lần tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh AC và CD.

Vậy nếu một đoạn thẳng được chia đều tại một điểm và chia không đều tại một điểm khác thì tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh là hai phần không đều của đoạn thẳng bằng hai lần tổng diện tích hình vuông có cạnh là nửa đoạn thẳng đó và diện tích hình vuông có cạnh là phần lệch giữa nửa đoạn thẳng đó và một phần của nó khi chia không đều. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 10: Nếu một đoạn thẳng được chia đôi và kéo dài thêm một đoạn thì tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng toàn bộ đoạn thẳng sau khi được kéo dài, và đoạn kéo dài sẽ gấp đôi tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng một nửa đoạn thẳng ban đầu và tổng của nửa đoạn thẳng ban đầu với đoạn kéo dài.



Gọi AB đoạn thẳng được chia đôi tại C, và BD là đoạn thẳng kéo dài. Có thể phát biểu rằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AD và DB gấp đôi tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AC và CD.

Dựng đoạn thẳng CE vuông góc với AB tại điểm C [MĐ. 1.11], xác định C sao cho AC bằng CB [MĐ. 1.3], nối các đoạn EA và EB. Từ điểm E dựng đoạn EF song song với AD [MĐ. 1.31], và từ D dựng đoạn FD song song với CE

[MĐ. 1.31]. Vì EC song song với FD, và EF cắt hai đoạn này, vì thế hai góc trong cùng phía CEF và EFD có tổng là hai góc vuông [MĐ. 1.29]. Như vậy, tổng của hai góc FEB và EFD phải bé hơn hai góc vuông. Hai đường thẳng bị cắt bởi một đường thẳng khác tạo nên hai góc trong cùng phía có tổng bé hơn hai góc vuông thì sẽ cắt nhau [ĐĐ. 5]. Do đó hai đường thẳng EB và FD kéo dài về phía hai điểm B, D sẽ cắt nhau. Kéo dài các đoạn thẳng đó và cho chúng cắt nhau tại điểm G, nối đoạn AG. Vì AC bằng CE nên góc EAC cũng bằng góc AEC [MĐ. 1.5]. Và góc tại C là một góc vuông. Nên mỗi góc EAC và AEC là một nửa góc vuông [MĐ. 1.32]. Tương tự, mỗi góc CEB và EBC cũng là một nửa góc vuông. Do đó góc AEB là một góc vuông. Và vì EBC là một nửa một góc vuông nên góc DBG cũng là một nửa góc vuông [MĐ. 1.15]. BDG là một góc vuông, như vậy nó bằng góc DCE bởi chúng là các góc so le trong [MĐ. 1.29]. Như vậy góc còn lại DGB phải là một nửa góc vuông. Cho nên góc DGB bằng góc DBG. Từ đó cạnh BD cũng bằng cạnh GD [MĐ. 1.6]. Tiếp theo, do EGF bằng nửa góc vuông, và góc tại F là một góc vuông, vì nó đối diện với góc vuông tại C [MĐ. 1.34], vì EGF là một nửa góc vuông nên góc còn lại FEG cũng là một nửa góc vuông. Như vậy góc EGF bằng góc FEG. Vì thế, cạnh GF bằng cạnh EF [MĐ. 1.6]. Và vì EC bằng CA nên diện tích hình vuông

có cạnh bằng EC bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng CA. Do đó tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng EC và CA bằng hai lần diện tích hình vuông có cạnh bằng CA. Và, diện tích hình vuông có cạnh bằng EA bằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng EC và CA [MĐ. 1.47]. Cho nên diện tích hình vuông có cạnh bằng EA gấp đôi diện tích hình vuông có cạnh bằng AC. Một lần nữa, vì FG bằng EF nên diện tích hình vuông có cạnh bằng FG cũng bằng với diện tích hình vuông có cạnh bằng FE. Do đó tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng GF và FE gấp đôi diện tích hình vuông có cạnh bằng EF. Và, diện tích hình vuông có cạnh EG bằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng GF và FE [MĐ. 1.47]. Do đó diện tích hình vuông có cạnh bằng EG là gấp đôi diện tích hình vuông có cạnh bằng EF. Và EF bằng CD [MĐ. 1.34]. Như vậy diện tích hình vuông có cạnh bằng EG gấp đôi diện tích hình vuông có cạnh bằng CD. Nhưng ở trên vừa chứng minh rằng diện tích hình vuông có cạnh bằng EA gấp đôi diện tích hình vuông có cạnh bằng AC. Do đó tổng diện tích của hình vuông có cạnh bằng AE và EG là gấp đôi tổng diện tích của hình vuông có cạnh bằng AC và CD. Và, diện tích hình vuông có cạnh bằng AG bằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AE và EG [MĐ. 1.47]. Do đó diện tích hình vuông có cạnh

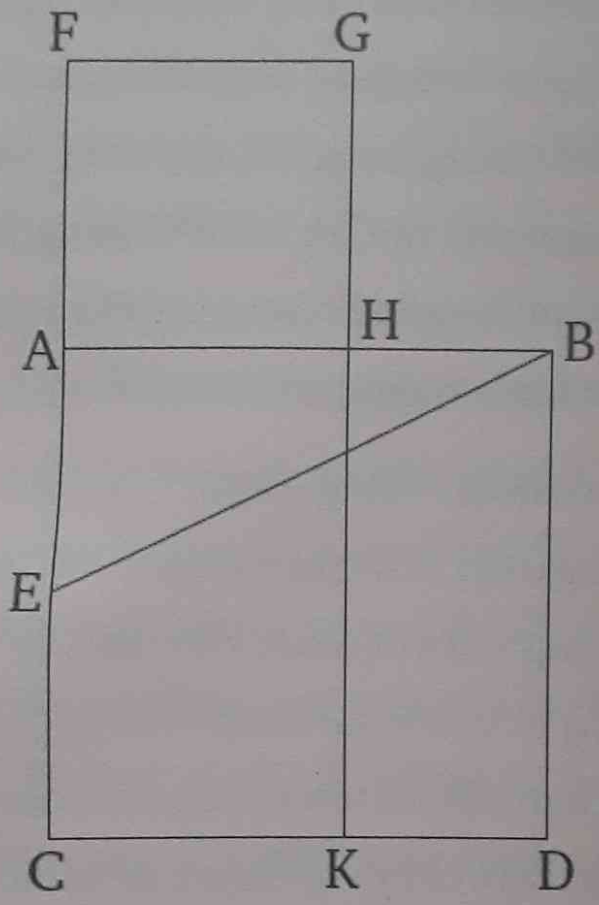
bằng AG là gấp đôi tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AC và CD. Và diện tích hình vuông có cạnh bằng AG bằng tổng diện tích các hình vuông có cạnh bằng AD và DG [MĐ. 1.47]. Cho nên tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh AD và DG cũng bằng hai lần tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh AC và CD. Mà DG bằng DB. Do đó tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh AD và DB gấp đôi tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh AC và CD.

Vậy nếu một đoạn thẳng được chia đôi và kéo dài thêm một đoạn thì tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng toàn bộ đoạn thẳng sau khi được kéo dài, và đoạn kéo dài sẽ gấp đôi tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng một nửa đoạn thẳng ban đầu và tổng của nửa đoạn thẳng ban đầu với đoạn kéo dài. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 11:</u> Có thể chia một đoạn thẳng ra thành hai phần sao cho diện tích của hình chữ nhật có các cạnh là đoạn thẳng đó và một trong hai phần của nó bằng với diện tích hình vuông có cạnh là phần đoạn thẳng còn lại.

Gọi AB là đoạn thẳng cho trước. Cần chia đoạn AB sao cho diện tích của hình chữ nhật có kích thước các cạnh là toàn bộ (đoạn thẳng đó) và một trong hai phần (của đoạn

thẳng) nó bằng với diện tích hình vuông có cạnh là phần đoạn thẳng còn lại.



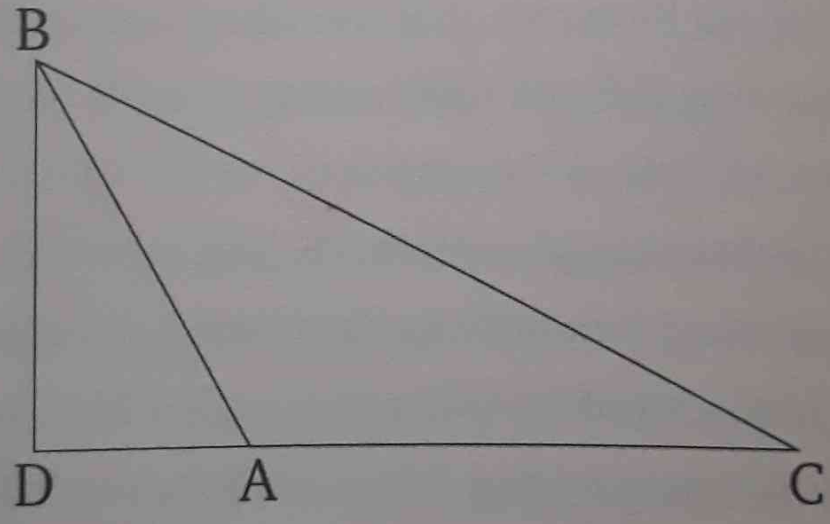
Dựng hình vuông ABDC trên đoạn AB [MĐ. 1.46], và dựng điểm E chia đôi đoạn AC [MĐ. 1.10], nối đoạn BE. Vẽ CA qua điểm F sao cho EF bằng BE [MĐ. 1.3]. Dựng hình vuông FH trên đoạn AF [MĐ. 1.46], và kéo dài GH đi qua điểm K. Có thể phát biểu rằng điểm H chia AB thành hai phần sao cho diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BH bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng AH.

Vì đoạn AC được chia đôi tại điểm Evà FA là phần kéo

dài của nó nên diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng CF và FA cộng với diện tích hình vuông có cạnh bằng AE bằng diện tích hình vuông có cạnh EF [MĐ. 2.6]. Và vì EF bằng EB nên diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng CF và FAcộng với diện tích hình vuông có cạnh bằng AE cũng bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng EB. Nhưng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng BA và AE bằng diện tích của hình vuông có cạnh EB. Vì góc tại A là góc vuông [MĐ 1.47]. Do đó diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng CF và FA cộng với diện tích hình vuông có cạnh bằng AE bằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng BA và AE. Trừ diện tích của hình vuông có cạnh là AE khỏi cả hai vế. Khi đó diện tích của hình chữ nhật còn lại có các cạnh bằng CF và FA bằng diện tích của hình vuông có cạnh bằng AB. Và FK là hình chữ nhật có các cạnh là CF và FA. Vì AF bằng FG. Và AD là hình vuông có cạnh là AB. Vậy diện tích của hình chữ nhật FK bằng diện tích của hình vuông có cạnh AD. Trừ diện tích hình chữ nhật AK ra khỏi cả hai hình này. Hình vuông FH có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật HD. HD là hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BH. Vì AB bằng BD. Còn FH là hình vuông có cạnh bằng AH. Như vậy diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BH bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng HA.

Vậy đoạn thẳng AB cho trước đã được phân chia tại điểm H, theo đó tạo ra hình chữ nhật có các cạnh bằng AB và BH có diện tích bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng HA. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

Mệnh đề 12[11]: Trong tam giác tù, diện tích hình vuông có cạnh đối diện góc tù lớn hơn tổng diện tích của hai hình vuông có hai cạnh là hai cạnh của góc tù một lượng bằng hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh là một trong hai cạnh góc tù và hình chiếu vuông góc của cạnh đối diện góc tù lên cạnh đó nối dài.



ABC là một tam giác tù với góc tù BAC. Dựng đoạn BD từ điểm B, vuông góc với CA [MĐ. 1.12]. Có thể phát biểu

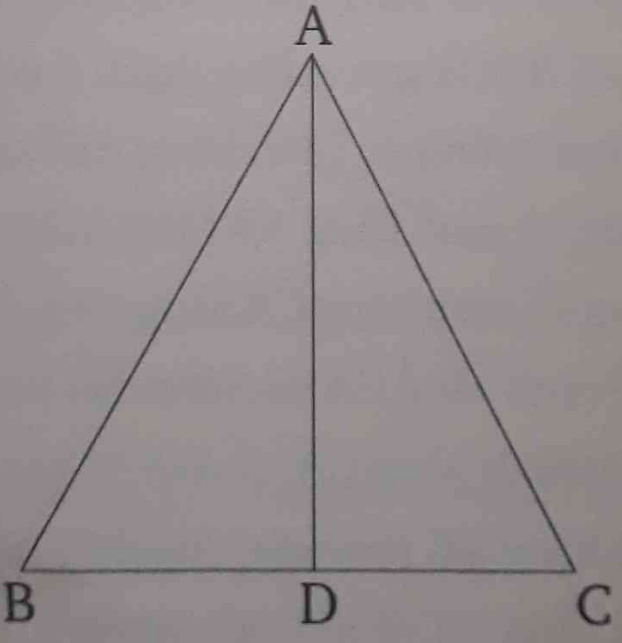
11 Mệnh đề này chính là hệ thức cosin quen thuộc trong tam giác: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos BAC$, vì $\cos BAC=-AD/AB$.

rằng diện tích hình vuông có cạnh bằng BC lớn hơn tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng BA và AC một lượng là hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng CA và AD.

Do đoạn CD bị phân chia ở điểm A bất kì nên diện tích hình vuông có cạnh bằng DC bằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng CA và AD và hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng CA và AD [MĐ. 2.4]. Cộng thêm diện tích hình vuông có cạnh bằng DB vào cả hai vế. Khi đó tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng CD và DB bằng tổng diện tích của ba hình vuông có cạnh bằng CA, AD và DB và hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng CA và AD. Tuy nhiên, tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng CD và DB bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng CB. Vì góc ở D là góc vuông [MĐ. 1.47]. Và tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AD và DB bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng AB [MĐ. 1.47]. Như vậy diện tích hình vuông có cạnh bằng CB bằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng CA và AB và hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng CA và AD. Vì vậy, diện tích hình vuông có cạnh bằng BC lớn hơn tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng BA và AC một lượng là hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng CA và AD.

Vậy trong tam giác tù, diện tích hình vuông có cạnh chắn góc tù lớn hơn tổng diện tích của hai hình vuông có hai cạnh là hai cạnh của góc tù một lượng bằng hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh là một trong hai cạnh góc tù và hình chiếu vuông góc của cạnh đối diện góc tù lên cạnh đó nối dài. Đây chính là điều phải chứng minh.

Mệnh đề 13[12]: Trong tam giác nhọn, diện tích hình vuông có cạnh đối diện góc nhọn nhỏ hơn tổng diện tích của hai hình vuông có hai cạnh là hai cạnh góc nhọn một lượng bằng hai lần diện tích hình chữ nhật có kích thước là một trong hai cạnh góc nhọn và hình chiếu vuông góc của cạnh đối diện góc nhọn lên cạnh đó.



12 [R. F] Mệnh đề này cũng chính là hệ thức cosin quen thuộc trong tam giác: $AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC.\cos ABC$, vì $\cos ABC=BD/AB$.

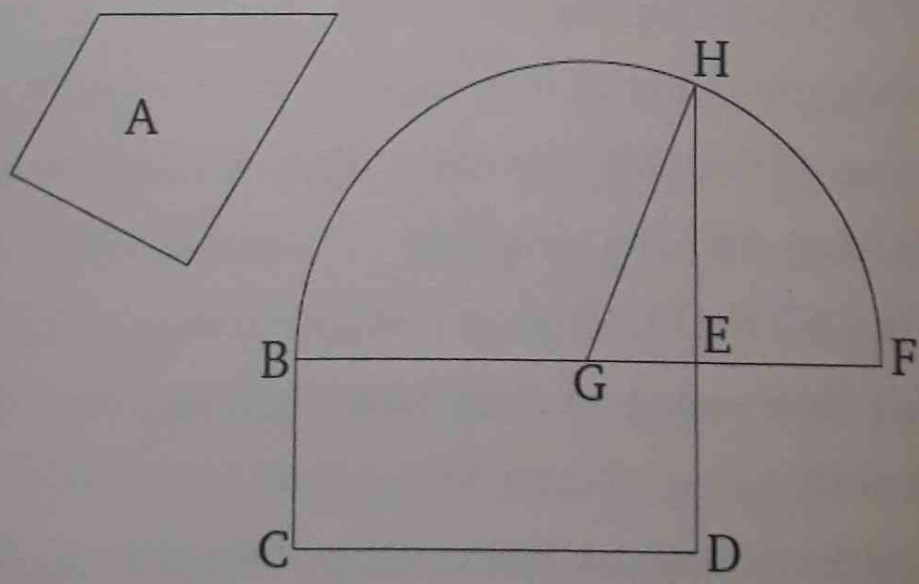
ABC là một tam giác nhọn, với góc nhọn tại B. Dựng đoạn thẳng AD từ điểm A vuông góc với BC [MĐ. 1.12]. Có thể phát biểu rằng diện tích hình vuông có cạnh bằng AC bé hơn tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh CB và AB một lượng bằng hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng CB và BD.

Do đoạn CB bị chia tại điểm D bất kì nên tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng CB và BD bằng hai lần tổng diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng CB và BD và diện tích hình vuông có cạnh bằng DC [MĐ. 2.7]. Cộng thêm diện tích vuông có cạnh bằng DA vào cả hai vế. Khi đó tổng diện tích của ba hình vuông có cạnh bằng CB, BD và DA bằng tổng của hai lần diện tích hình chữ nhật có cạnh bằng CB và BD và diện tích của cả hai hình vuông có cạnh bằng AD và DC. Tuy nhiên diện tích của hình vuông có cạnh bằng AB bằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng BD và DA. Vì góc ở D là góc vuông [MĐ. 1.47]. Và diện tích hình vuông có cạnh bằng AC bằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng AD và DC [MĐ. 1.47]. Do đó tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng CB và BA bằng tổng của diện tích hình vuông có cạnh bằng AC và hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng CB và BD. Vậy, diện tích hình vuông có cạnh AC bé hơn tổng diện tích của

hai hình vuông có cạnh CB và AB một lượng bằng hai lần diện tích hình chữ nhật có các cạnh bằng CB và BD.

Vậy trong tam giác nhọn, diện tích hình vuông có cạnh đối diện góc nhọn nhỏ hơn tổng diện tích của hai hình vuông có hai cạnh là hai cạnh góc nhọn một lượng bằng hai lần diện tích hình chữ nhật có kích thước là một trong hai cạnh góc nhọn và hình chiếu vuông góc của cạnh đối diện góc nhọn lên cạnh đó. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 14:</u> Dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích của một đa giác cho trước.



A là đa giác cho trước. Cần dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích của đa giác A.

Dựng hình chữ nhật BD có diện tích bằng diện tích của A [MĐ 1.45]. Như vậy, nếu BE bằng ED thì có điều cần thực hiện. Vì thì hình vuông BD dựng được có diện tích bằng đa giác A. Còn nếu ngược lại thì một trong hai cạnh BE hoặc ED phải lớn hơn cạnh còn lại. Giả sử BE lớn hơn, và kéo dài đoạn đó tới điểm F, sao cho EF bằng ED [MĐ. 1.3]. Chia đôi đoạn BF tại điểm G [MĐ 1.10]. Và, từ tâm G, với bán kính là GB hay GF, vẽ nửa vòng tròn BHF. Kéo dài DE tới điểm H, nối đoạn GH.

Như thế, do đoạn thẳng BF được chia đều tại G, và không đều tại E nên tổng diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng BE và EF và diện tích hình vuông có cạnh bằng EG bằng diện tích hình vuông có cạnh GF [MĐ. 2.5]. Và GF bằng GH. Cho nên tổng diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng BE và EF và diện tích hình vuông có cạnh bằng GE cũng bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng GH. Diện tích của hình vuông có cạnh bằng GH bằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng HE và EG [MĐ. 1.47]. Vậy tổng diện tích của hình chữ nhật có các cạnh bằng BE và EF và diện tích hình vuông có cạnh bằng GE bằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh bằng HE và EG.Trừ diện tích của hình vuông có cạnh bằng GE khỏi cả hai vế. Khi đó diện tích của hình chữ nhật còn lại có các cạnh bằng BE và EF bằng

với diện tích hình vuông có cạnh bằng EH. Nhưng BD là hình chữ nhật có các cạnh bằng BE và EF. Do EF bằng ED. Cho nên diện tích hình bình hành BD bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng HE. Mà BD bằng diện tích đa giác A. Như vậy diện tích đa giác A cũng bằng diện tích hình vuông có cạnh EH.

Vậy đã dựng được một hình vuông có cạnh bằng EH, có diện tích bằng diện tích của đa giác A cho trước. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

QUYỂN 3

Cơ sở Hình học phẳng về hình tròn

Định nghĩa

1. Các hình tròn bằng nhau là các hình tròn mà đường kính của chúng là bằng nhau, hay khoảng cách từ tâm đến đường chu vi là bằng nhau (tức là các bán kính của chúng là bằng nhau).

2. Một đường thẳng được gọi là tiếp xúc với một hình tròn là một đường thẳng bất kì gặp đường tròn và được kéo dài mà không cắt hình tròn đó.

3. Các hình tròn được gọi là tiếp xúc nhau là các hình tròn bất kỳ gặp nhau mà không cắt nhau.

4. Trong một hình tròn, các đường thẳng được gọi là cách đều tâm khi mà các đoạn thẳng vuông góc kẻ từ tâm đến các đường thẳng đó là bằng nhau.

5. Và đường thẳng đó được gọi là cách xa tâm hơn khi mà đường vuông góc vẽ từ tâm là dài hơn.

6. Một hình viên phân là hình tạo bởi một đoạn thẳng và một phần đường chu vi của hình tròn [hay cung tròn].

7. Và góc của một hình viên phân là góc kẹp giữa đoạn thẳng đó và đường chu vi của hình tròn.

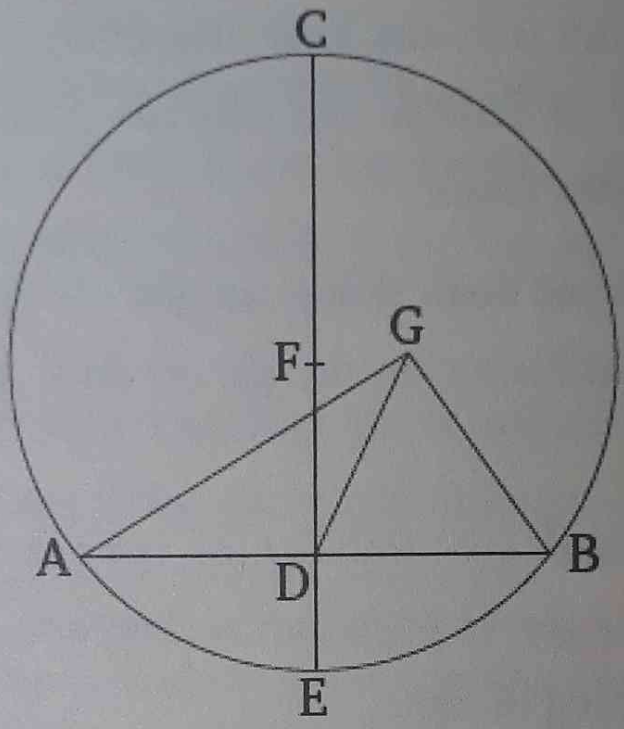
8. Và góc nội tiếp một hình viên phân là góc kẹp giữa ai đoạn thẳng cắt nhau khi lấy một điểm bất kỳ nằm trên oạn chu vi hình tròn của hình viên phân rồi nối các đoạn hẳng từ điểm đó đến các đầu mút của đoạn thẳng là cạnh láy của hình viên phân.

9. Và khi các đoạn thẳng tạo góc cắt một phần chu vi cung tròn) của hình tròn thì góc đó được gọi là góc chắn cung).

10. Một hình quạt tròn là hình tạo bởi các đoạn thẳng ao quanh một góc và phần chu vi chắn bởi góc đó, khi mà óc đó được dựng từ tâm.

11. Các viên phân đồng dạng là những hình viên phân hận các góc viên phân bằng nhau, hay có các góc viên phân ằng nhau.

<u>Mệnh đề 1:</u> Tìm tâm của một hình tròn cho trước.



Gọi ABC là hình tròn cho trước. Hãy tìm tâm của hình tròn ABC.

Vẽ đoạn thẳng AB bất kì cắt qua hình tròn ABC, và chia đôi AB tại điểm D [MĐ. 1.9]. Từ điểm D, vẽ đoạn DC vuông góc với AB [MĐ. 1.11]. Kéo dài CD đến E. Và chia đôi CE tại F [MĐ. 1.9]. Có thể phát biểu rằng (điểm) F là tâm của (hình tròn) ABC.

Giả sử nếu không phải là như thế, mà G là tâm của hình tròn, và nối G với A, G với D và G với B. Bởi vì AD bằng DB và DG là chung nên hai đoạn AD, DG lần lượt bằng với hai đoạn BD, DG. Và cạnh GA bằng cạnh GB. Bởi chúng đều

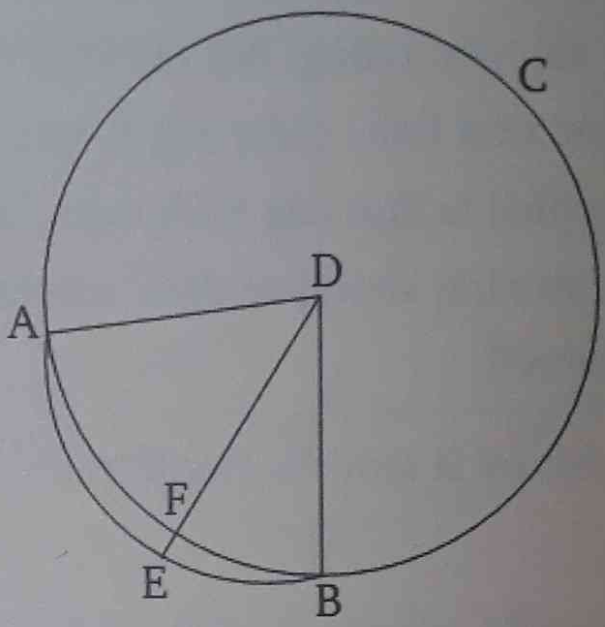
là bán kính. Như vậy, góc ADG bằng góc GDB [MĐ. 1.8]. Và khi một đường thẳng đứng tựa lên một đường thẳng khác tạo nên các góc liền kề bằng nhau thì mỗi góc bằng nhau đó đều là một góc vuông [ĐN. 1.10]. Do đó GDB là một góc vuông. Và FDB cũng là một góc vuông. Bởi vậy FDB bằng GDB, góc lớn hơn bằng góc nhỏ hơn. Điều này là không thể. Vì vậy, (điểm) G không phải là tâm của hình tròn ABC. Tương tự, có thể chứng minh rằng không có điểm nào khác là tâm của hình tròn, trừ điểm F.

Như vậy, điểm F là tâm của (hình tròn) ABC.

Hệ quả

Như vậy, từ kết quả này, rõ ràng rằng nếu bất cứ đoạn thẳng nào trong hình tròn vừa chia đôi vừa vuông góc một đoạn thẳng khác thì tâm của hình tròn nằm trên đoạn thứ nhất. Đó chính là yêu cầu cần thực hiện.

<u>Mệnh đề 2:</u> Chọn hai điểm bất kỳ trên đường chu vi của một hình tròn, thì, đoạn thẳng nối hai điểm nói trên sẽ nằm bên trong hình tròn.



Cho hình tròn ABC, và chọn ngẫu nhiên hai điểm A và B nằm trên đường chu vi của nó. Có thể phát biểu rằng đoạn thẳng nối A với B sẽ nằm bên trong hình tròn.

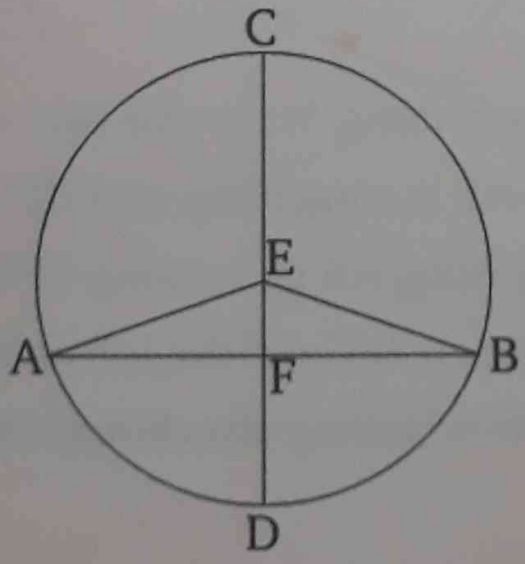
Bởi vì nếu không thì giả sử rằng nó nằm bên ngoài hình tròn giống như AEB. Xác định được tâm của hình tròn ABC [MĐ. 3.1], và gọi là điểm D. Nối D với A, D với B, và nối D, F, E thẳng hàng.

Do đó, vì DA bằng với DB nên góc DAE bằng DBE [MĐ. 1.5]. Và vì trong tam giác DAE, cạnh AEB được kéo dài, suy ra góc DEB lớn hơn DAE [MĐ. 1.16]. Và DAE bằng DBE [MĐ. 1.5]. Vậy DEB lớn hơn DBE. Và góc lớn hơn bị

chắn bởi cạnh lớn hơn [MĐ. 1.19]. Suy ra, DB lớn hơn DE. Và DB bằng DF. Suy ra, DF dài hơn DE, đoạn ngắn lớn hơn đoạn dài. Điều này là không thể. Suy ra, đoạn thẳng nối A với B sẽ không nằm ngoài hình tròn. Nên, tương tự, có thể chứng minh rằng cũng không đường thẳng nào có thể nằm trên chính đường chu vi hình tròn. Do đó nó sẽ nằm bên trong hình tròn.

Như vậy, nếu lấy hai điểm bất kỳ trên đường chu vi của một hình tròn thì đoạn thẳng nối các điểm này sẽ nằm bên trong hình tròn. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 3:</u> Trong một hình tròn, nếu một đường thẳng bất kỳ đi qua tâm cắt đôi đoạn thẳng bất kỳ không đi qua tâm, thì cũng cắt nó theo một góc vuông. Và (ngược lại) nếu [đường thẳng qua tâm đó] cắt nó tại một góc vuông thì cũng cắt đôi nó.



Cho hình tròn ABC, và trong đó, cho đường thẳng CD bất kỳ qua tâm cắt đôi đoạn thẳng AB bất kỳ không qua tâm tại điểm F. Có thể phát biểu rằng CD cũng cắt AB theo góc vuông.

Xác định được tâm của hình tròn ABC [MĐ. 3.1], gọi *là điểm E, và nối E với A, E với B.*

Và bởi vì AF bằng với FB, và FE là cạnh chung, nên hai *cạnh của tam giác* AFE bằng với hai cạnh của tam giác BFE. Và cạnh đáy EA bằng với cạnh đáy EB. Suy ra, góc AFE là bằng góc BFE [MĐ. 1.8]. Và khi một đường thẳng đứng tựa lên một đường thẳng khác tạo thành các góc kề bằng nhau, mỗi góc bằng nhau ấy là một góc vuông [ĐN. 1.10]. Suy ra, AFE và BFE là các góc vuông. Suy ra, đường thẳng qua tâm CD cắt đôi đoạn thẳng không qua tâm AB, cũng cắt AB theo một góc vuông.

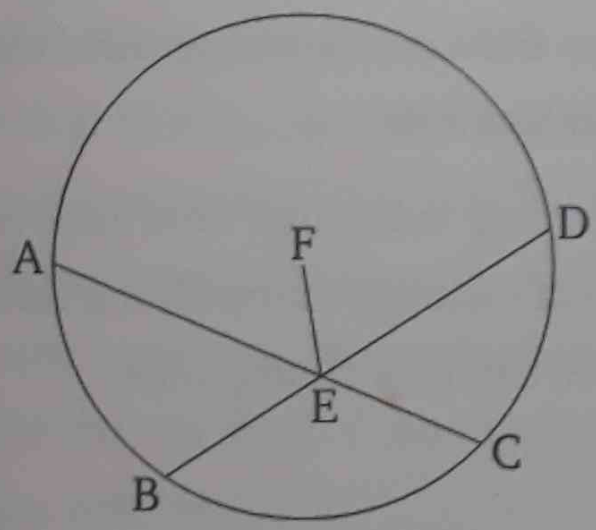
Bây giờ giả sử CD cắt AB theo một góc vuông. Có thể phát biểu rằng nó cũng cắt đôi AB. Điều đó nghĩa là, AF bằng với FB.

Với cùng cách dựng hình như vậy, vì EA là bằng với EB cho nên góc EAF là cũng bằng với EBF [MĐ. 1.5]. Và góc vuông AFE cũng bằng với góc vuông BFE. Suy ra, EAF và EFB là hai tam giác có hai góc bằng nhau, và một cạnh cũng bằng nhau là cạnh EF chung của chúng, chắn một trong các

góc bằng nhau. Suy ra, các cạnh còn lại của chúng cũng sẽ tương ứng bằng nhau [MĐ. 1.26]. Suy ra, AF bằng với FB.

Như vậy, trong một hình tròn, một đường thẳng bất kỳ qua tâm cắt đôi đoạn thẳng bất kỳ không qua tâm thì cũng cắt nó theo một góc vuông. Và (ngược lại) nếu cắt nó theo một góc vuông thì cũng cắt đôi nó. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 4:</u> Trong một hình tròn, nếu hai đoạn thẳng không qua tâm cắt nhau thì chúng không chia nhau làm đôi.



Gọi ABCD là một hình tròn, và trong đó, cho hai đoạn thẳng AC và BD không qua tâm, cắt nhau tại điểm E. Có thể

phát biểu rằng chúng không chia nhau làm đôi.

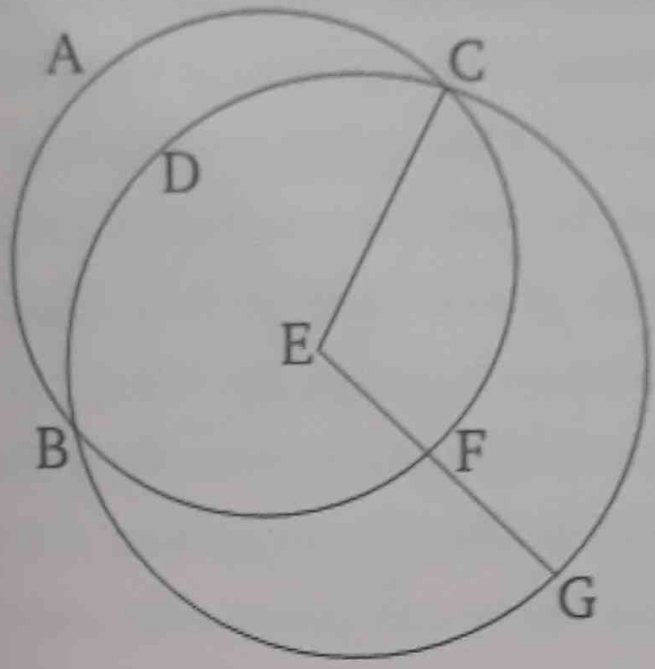
Bởi nếu không thì giả sử rằng chúng chia nhau làm đôi, nghĩa là AE là bằng với EC, và BE bằng ED. Và xác định được tâm của hình tròn ABCD [MĐ. 3.1], và gọi đó là điểm F, và nối F với E.

Theo đó, bởi vì đoạn thẳng EF bất kỳ qua tâm cắt đôi đoạn thẳng AC bất kỳ không qua tâm, nên cũng cắt nó theo một góc vuông [MĐ. 3.3]. Suy ra, FEA là một góc vuông. Hơn nữa, bởi vì đoạn thẳng EF bất kỳ cắt đôi đoạn thẳng BD bất kỳ thì cũng cắt nó theo một góc vuông [MĐ. 3.3]. Vậy FEB (là) một góc vuông. Nhưng FEA đã được chứng tỏ là một góc vuông. Suy ra, FEA bằng với FEB, góc nhỏ hơn bằng với góc lớn hơn. Điều này là không thể. Suy ra, AC và BD không chia nhau làm đôi.

Như vậy, trong một hình tròn, nếu hai đoạn thẳng không qua tâm cắt nhau thì chúng không chia nhau làm đôi. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 5:</u> Nếu hai hình tròn cắt nhau thì chúng không đồng tâm.

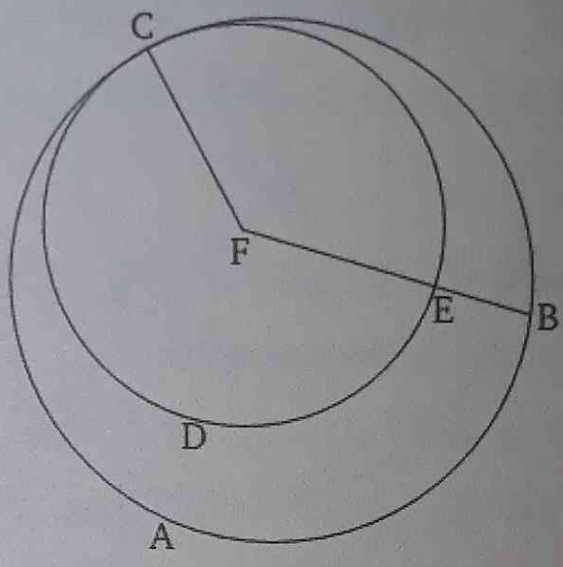
Cho hai hình tròn ABC và CDG cắt nhau tại các điểm B và C. Có thể phát biểu rằng chúng sẽ không đồng tâm.



Bởi vì nếu ngược lại, thì gọi là E tâm chung, nối EC, và cho EFG cắt ngẫu nhiên qua (hai hình tròn). Và bởi vì điểm E là tâm của hình tròn ABC, nên EC bằng với EF. Hơn nữa, điểm E là tâm của hình tròn CDG, nên EC là bằng với EG. Nhưng EC đã được chứng tỏ là bằng với EF. Suy ra, EF cũng bằng với EG, cạnh ngắn hơn bằng với cạnh dài hơn. Điều này là không thể. Suy ra, điểm E không phải là tâm chung của hai hình tròn ABC và CDG.

Như vậy, nếu hai hình tròn cắt nhau thì chúng sẽ không đồng tâm. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 6:</u> Nếu hai hình tròn tiếp xúc thì chúng sẽ không đồng tâm.



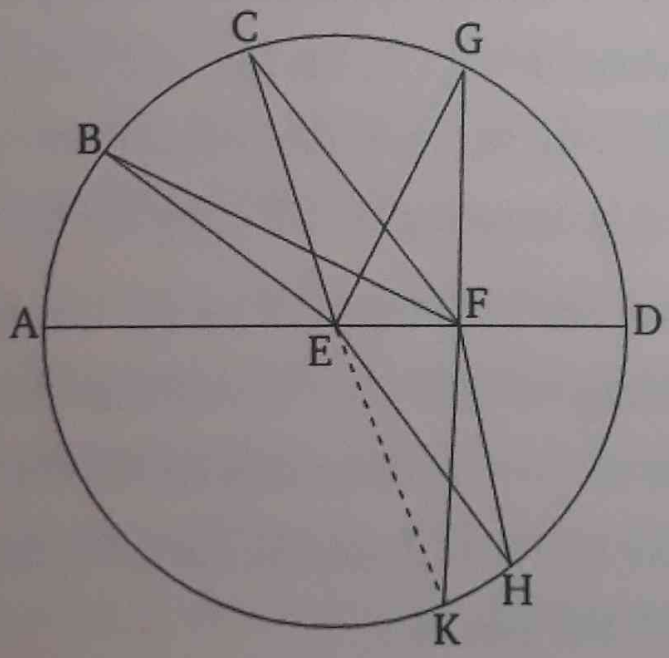
Cho hai hình tròn ABC và CDE tiếp xúc tại điểm C. Có thể phát biểu rằng chúng sẽ không đồng tâm.

Bởi vì nếu ngược lại thì gọi là F (tâm chung), nối FC, và cho FEB cắt ngẫu nhiên qua (hai hình tròn).

Bởi vì điểm F là tâm của hình tròn ABC, cho nên FC là bằng với FB. Hơn nữa, điểm F là tâm của hình tròn CDR, nên FC là bằng với FE. Nhưng FC đã được chứng tỏ là bằng với FB. Suy ra, FE cũng bằng với FB, cạnh ngắn hơn bằng cạnh dài hơn. Điều này là không thể. Suy ra, điểm F không phải là tâm chung của các hình tròn ABC và CDE.

Như vậy, nếu hai hình tròn tiếp xúc nhau thì chúng sẽ không đồng tâm. Đây chính là yêu cầu cần phải chứng minh.

Mệnh đề 7: **Nếu trên [một] đường kính của một hình tròn, lấy một điểm bất kỳ không phải là tâm hình tròn, và từ điểm đó vẽ những đoạn thẳng tùy ý đến đường chu vi của hình tròn, thì đoạn thẳng dài nhất là đoạn sẽ đi qua tâm, và đoạn ngắn nhất là đoạn còn lại (trên cùng một đường kính ấy). Và đối với những đoạn khác, càng nằm gần[01] đoạn (thẳng) qua tâm thì càng dài hơn so với những đoạn (thẳng) nằm cách xa hơn. Và chỉ vẽ được hai[02] đoạn (thẳng) bằng nhau, đến đường chu vi của hình tròn, mỗi đoạn nằm về một phía của đoạn (thẳng) ngắn nhất.**



---

01 Coi như, mức độ xa/gần xét trong tương quan với độ đóng mở của *góc kẹp giữa*.

02 Diễn đạt như vậy có thể không rõ nghĩa, nhưng là ý đồ của tác giả: xem thêm MĐ. 3.9. (ND)

Cho hình tròn ABCD, với AD là đường kính, và gọi F là điểm bất kỳ không phải là tâm của hình tròn, nằm trên AD. Gọi E là tâm của hình tròn. Và từ diểm F, vẽ các đoạn tùy ý FB, FC và FG đến đường tròn ABCD. Có thể phát biểu rằng FA là đoạn thẳng dài nhất, DF ngắn nhất, và trong số những đoạn còn lại, thì FB dài hơn FC, FC dài hơn FG.

Nối B với E, C với E và G với E. Và bởi trong mọi tam giác, tổng hai cạnh bất kỳ dài hơn cạnh còn lại [MĐ. 1.20], do đó tổng EB và EF lớn hơn BF. Và AE bằng BE [Suy ra, tổng BE và EF bằng AF]. Suy ra, AF dài hơn BF. Hơn nữa, bởi BE bằng CE, và FE là chung, nên hai đoạn thẳng BE, EF lần lượt bằng với hai đoạn thẳng CE, EF. Mà, góc BEF (thì) cũng lớn hơn góc CEF.[03] Suy ra, cạnh đáy BF dài hơn đáy CF [MĐ. 1.24]. Nên, với lý do tương tự, CF cũng dài hơn FG.

Hơn nữa, bởi vì [tổng] GF và FE lớn hơn EG [MĐ. 1.20], và EG bằng với ED, nên GF và FE lớn hơn ED. Trừ EF ra khỏi cả hai vế. Suy ra, đoạn còn lại GF thì dài hơn đoạn còn lại ED. Suy ra, FA là đoạn dài nhất, FD là ngắn nhất, và FB dài hơn FC, FC hơn FG.

Cũng có thể phát biểu rằng từ điểm F chỉ vẽ được hai đoạn bằng nhau tới đường chu vi của hình tròn ABCD, mỗi

---

03 Điều này không phải lúc nào cũng đúng, trừ trường hợp như của hình vẽ.

đoạn nằm về một phía của đoạn ngắn nhất FD. Tại điểm F trên đoạn thẳng EF, dựng góc FEH bằng với góc GED [MĐ. 1.23], và nối FH. Bởi GE bằng với EH, và EF (là) chung, nên hai đoạn (thẳng) GE, EF lần lượt bằng hai đoạn HE, EF. Và góc GEF bằng với góc HEF. Suy ra, cạnh đáy FG bằng cạnh đáy FH [MĐ. 1.4]. Nên có thể phát biểu rằng, từ F không thể vẽ [thêm] được một đoạn nào khác đến đường chu vi của hình tròn bằng với FG. Bởi, nếu ngược lại, vẽ đoạn FK. Và vì FK bằng FG, mà FH lại bằng FG, do đó FK bằng FH, đoạn nằm gần với đoạn (thẳng) qua tâm lại bằng với đoạn cách xa [đoạn thẳng qua] tâm. Điều này là không thể. Suy ra, từ F không thể vẽ [thêm] được một đoạn (thẳng) nào khác đến đường chu vi của hình tròn mà có độ dài bằng với GF. Suy ra, chỉ có một (đoạn thẳng như vậy).

Như vậy, nếu trên [một] đường kính của một đường tròn, lấy một điểm bất kỳ [mà] không phải là tâm hình tròn, và từ điểm đó vẽ những đoạn thẳng tùy ý đến đường chu vi của hình tròn, thì đoạn thẳng dài nhất là đoạn sẽ đi qua tâm, và đoạn ngắn nhất là đoạn còn lại (trên cùng một đường kính đó). Và đối với những đoạn khác, càng nằm gần đoạn (thẳng) qua tâm thì càng dài hơn so với những đoạn (thẳng) nằm cách xa hơn. Và chỉ vẽ được hai đoạn (thẳng) bằng nhau, đến đường chu vi của hình tròn, mỗi đoạn nằm về

một phía của đoạn (thẳng) ngắn nhất. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 8:</u> Nếu lấy một điểm bất kỳ nằm bên ngoài một hình tròn, và vẽ những đoạn thẳng bất kỳ từ điểm đó đến đường chu vi của hình tròn, một đoạn đi qua tâm, những đoạn còn lại tùy ý, thì đối với những đoạn thẳng hướng tới phần lõm[04] của hình tròn, đoạn dài nhất là đoạn đi qua tâm. Với những đoạn khác, càng nằm gần[05] đoạn (thẳng) qua tâm thì càng dài hơn so với những đoạn nằm cách xa hơn. Đối với những đoạn thẳng hướng tới phần lồi[06] của hình tròn, đoạn ngắn nhất là nằm giữa điểm [bất kỳ] đó và đường kính. Với những đoạn khác, càng nằm gần đoạn (thẳng) ngắn nhất thì càng ngắn đi so với những đoạn nằm cách xa hơn. Và chỉ vẽ được hai[07] đoạn (thẳng) bằng nhau đến đường chu vi của hình tròn, mỗi đoạn nằm về một phía của đoạn (thẳng) ngắn nhất.

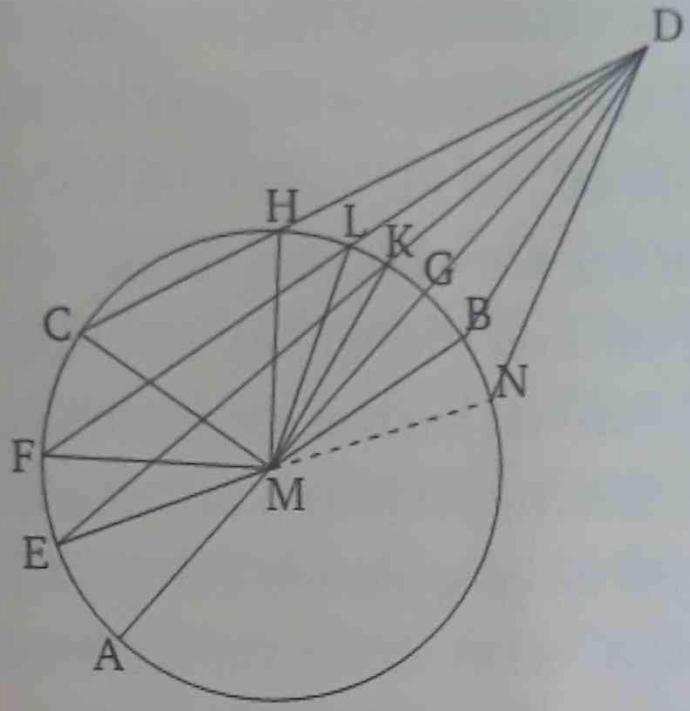
---

04 Lồi/lõm ở đây là ứng với phép dựng hình như minh họa. (ND)

05 Coi như mức độ xa/gần, xét trong mối tương quan với độ đóng/mở của góc kẹp giữa.

06 Xem chú thích 4 của người dịch. (ND)

07 Diễn đạt như vậy có thể không rõ nghĩa, nhưng là ý đồ của tác giả: xem thêm MĐ 3.9. (ND)



Cho hình tròn ABCD, lấy điểm D bất kỳ nằm ngoài ABC, và từ đó dựng những đoạn DA, DE, DF và DC tùy ý cắt qua (hình tròn), và cho DA đi qua tâm. Có thể phát biểu rằng với những đoạn thẳng hướng tới phần lõm của đường tròn, AEFC, dài nhất là đoạn AD đi qua tâm, và DE dài hơn DF, và DF hơn DC. Đối với những đoạn thẳng hướng về phần lồi của đường tròn, HLKG, ngắn nhất là đoạn DG nằm giữa điểm đó với đường kính AG, và đoạn (thẳng) càng gần đường (thẳng) ngắn nhất DG thì luôn nhỏ hơn đường ở xa hơn, tức là DK ngắn hơn DL, và DL ngắn hơn DH.

Xác định được tâm của hình tròn [MĐ. 3.1], và gọi đó là M [MĐ. 3.1]. Và nối M với E, M với F, M với C, M với K,

M với L và M với H.

Và bởi vì AM bằng với EM, thêm MD vào cả hai đoạn trên. Suy ra, AD thì bằng với tổng EM và MD. Nhưng, tổng EM và MD thì dài hơn ED [MĐ. 1.20]. Suy ra, AD cũng dài hơn ED. Hơn nữa, bởi vì ME bằng với MF, và MD (là) chung, suy ra tổng các đoạn (thẳng) EM, MD bằng tổng với FM, MD. Và góc EMD thì lớn hơn góc FMD.[08] Suy ra, cạnh đáy ED dài hơn cạnh đáy FD [MĐ. 1.24]. Nên, tương tự, có thể chỉ ra rằng FD thì cũng dài hơn CD. Suy ra, AD (là) đoạn (thẳng) dài nhất, và DE dài hơn DF, và DF hơn DC.

Và bởi vì tổng MK và KD thì dài hơn MD [MĐ. 1.20]. và MG bằng với MK, suy ra đoạn KD còn lại dài hơn đoạn GD còn lại. Nên GD ngắn hơn KD. Và bởi vì trong tam giác MLD, hai đường kẻ trong MK và KD được dựng nên từ một trong ba cạnh, MD, nên suy ra tổng MK và KD ngắn hơn tổng ML và LD [MĐ. 1.21]. Và MK bằng với ML. Suy ra, đoạn DK còn lại thì ngắn hơn đoạn DL còn lại. Nên tương tự, có thể chỉ ra rằng DL thì cũng ngắn hơn DH. Suy ra, DG là đoạn (thẳng) ngắn nhất, và DK ngắn hơn DL, DL ngắn hơn DH.

Cũng có thể phát biểu rằng, từ D chỉ vẽ được hai đoạn

---

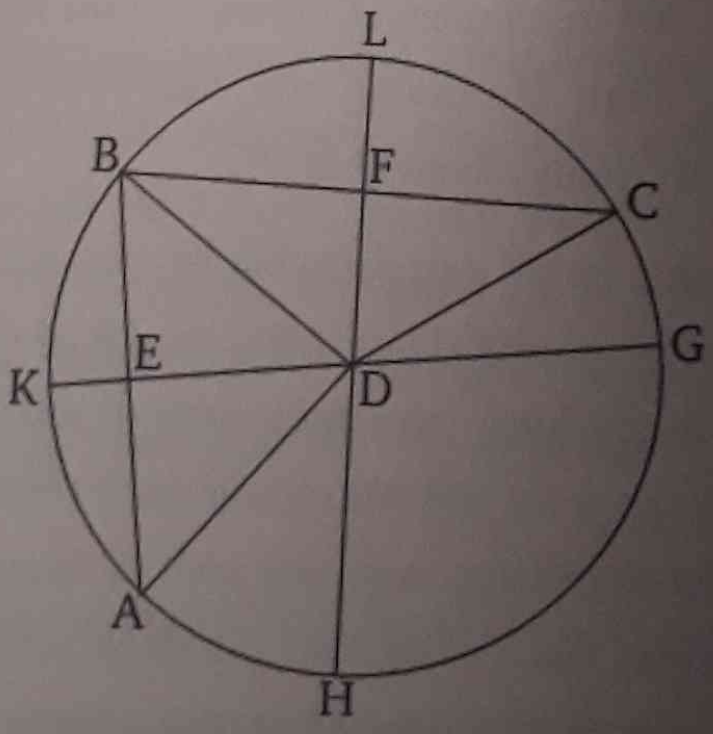
08 Điều này không phải lúc nào cũng đúng, trừ trường hợp như của hình vẽ.

thẳng bằng nhau đến đường chu vi của hình tròn, mỗi đường nằm về một phía của đoạn (thẳng) ngắn nhất, DG. Tại điểm M trên đoạn thẳng MD, dựng góc DMB bằng với góc KMD [MĐ. 1.23], và nối DB. Và bởi vì MK bằng với MB, và MD (là) chung, nên hai đường (thẳng) KM, MD lần lượt bằng với hai đường (thẳng) BM, MD. Và góc KMD bằng với góc BMD. Suy ra, cạnh đáy DK bằng với đáy DB [MĐ. 1.4]. [Nên] có thể phát biểu rằng từ điểm D không thể vẽ [thêm] một đoạn (thẳng) nào khác bằng với DK, đến đường chu vi của hình tròn. Bởi, nếu ngược lại, vẽ [được] đoạn thẳng như vậy, và gọi đó là DN. Theo đó, vì DK bằng DN, mà DK bằng DB, nên DB bằng DN, tức là đoạn (thẳng) nằm gần đoạn (thẳng) ngắn nhất DG, thì bằng với đoạn nằm cách xa hơn. Điều này là không thể. Suy ra, từ điểm D, không vẽ được hơn hai đoạn (thẳng) bằng nhau đến đường tròn, mỗi đoạn nằm về một phía của đoạn (thẳng) ngắn nhất DG.

Như vậy, nếu lấy một điểm bất kỳ nằm bên ngoài một hình tròn, và vẽ những đoạn thẳng bất kỳ từ điểm đó đến đường chu vi của hình tròn, một đoạn đi qua tâm, những đoạn còn lại tùy ý, thì đối với những đoạn thẳng hướng tới phần lõm của hình tròn, đoạn dài nhất là đoạn đi qua tâm. Với những đoạn khác, càng nằm gần đoạn (thẳng) qua tâm thì càng dài hơn so với những đoạn nằm cách xa hơn. Đối với

những đoạn thẳng hướng tới phần lồi của hình tròn, đoạn ngắn nhất là nằm giữa điểm đó và đường kính. Với những đoạn khác, càng nằm gần đoạn (thẳng) ngắn nhất thì càng ngắn đi so với những đoạn nằm cách xa hơn. Và chỉ vẽ được hai đoạn (thẳng) bằng nhau đến đường chu vi của hình tròn, mỗi đoạn nằm về một phía của đoạn (thẳng) ngắn nhất. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 9:</u> Nếu lấy một điểm tùy ý trong một hình tròn, và từ điểm đó vẽ được nhiều hơn hai đoạn thẳng bằng nhau đến đường chu vi của hình tròn, thì điểm được lấy đó là tâm của hình tròn.



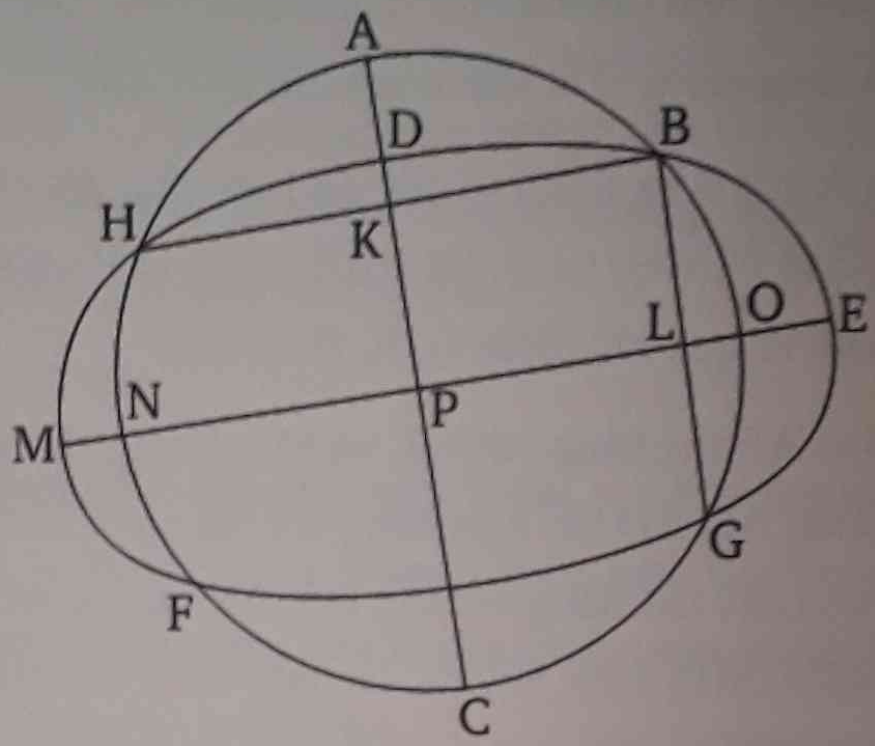
Gọi ABC là một hình tròn, D là một điểm nằm trong nó, và từ D vẽ được nhiều hơn hai đoạn thẳng bằng nhau DA, DB và DC đến đường chu vi của hình tròn ABC. Có thể phát biểu rằng điểm D là tâm của hình tròn ABC.

Nối A với B và B với C, rồi lần lượt chia đôi chúng tại các điểm E và F [MĐ. 1.10]. Và nối E với D, và F với E, cho là chúng được vẽ qua các điểm G, K, H và L.

Bởi vì AE thì bằng với EB, và ED chung, cho nên, hai đoạn (thẳng) AE, ED lần lượt bằng với hai đoạn (thẳng) BE, ED. Và cạnh đáy DA bằng với đáy DB. Suy ra, góc AED bằng với góc BED [MĐ. 1.8]. Suy ra, các góc AED và BED là các góc vuông [ĐN. 1.10]. Suy ra, GK vừa chia đôi vừa vuông góc AB. Và vì trong một đường tròn, khi đường thẳng nào đó vừa chia đôi vừa vuông góc một đoạn thẳng bất kỳ, thì tâm của hình tròn sẽ nằm trên đường (thẳng) trước [HQ. MĐ. 3.1], nên tâm của hình tròn nằm trên GK. Nên, với lý do tương tự, tâm của hình tròn ABC thì cũng nằm trên HL. Và đường thẳng GL và HL không có chung (điểm) nào khác ngoài điểm D. Suy ra, điểm D là tâm của hình tròn ABC.

Như vậy nếu lấy một điểm tùy ý trong một hình tròn, và từ điểm đó vẽ được nhiều hơn hai đoạn thẳng bằng nhau đến đường chu vi của hình tròn, thì điểm được lấy đó là tâm của hình tròn. Đây chính là yêu cầu cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 10:</u> Một hình tròn cắt một hình tròn[09] khác tại không quá hai điểm.



Bởi vì nếu không thì giả sử rằng hình tròn ABC cắt hình tròn DEF nhiều hơn hai điểm, tại B, G, F và H. Và nối B với H và B với G, lần lượt chia đôi chúng tại các điểm K và L. Và từ K và L, dựng KC và LM lần lượt vuông góc với BH và BG [MĐ. 1.11], giả sử chúng được vẽ lần lượt qua các điểm A và E.

Bởi vì trong hình tròn ABC, AC là đường thẳng bất kỳ cắt BH – đường thẳng (khác), vừa chia làm đôi vừa vuông góc, vậy nên suy ra, tâm của hình tròn ABC nằm trên AC

09 Circle: trong trường hợp này, hiểu chính xác, là đường chu vi hay, còn gọi là, đường tròn. (ND)

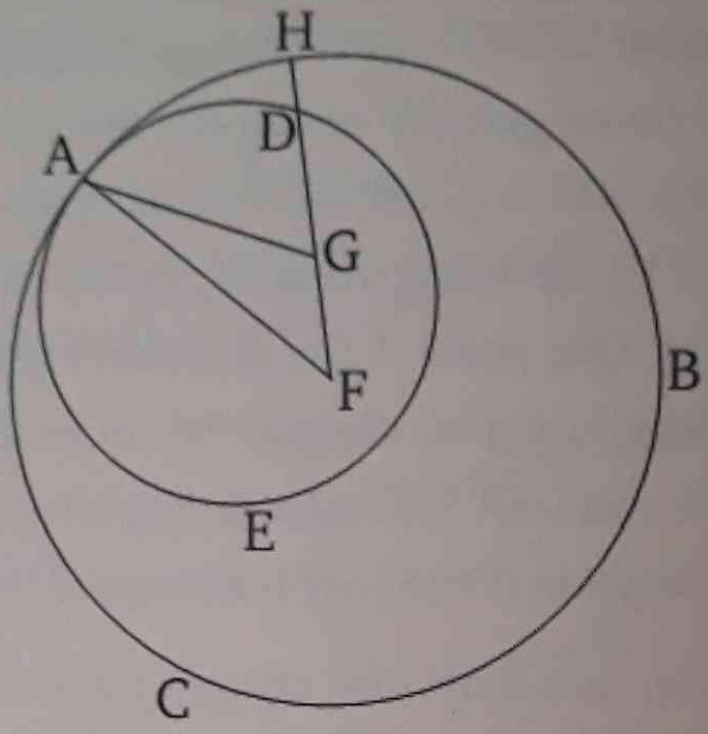
[HQ. MĐ. 3.1]. Hơn nữa, bởi vì cũng trong hình tròn ABC, đường thẳng bất kỳ NO cắt BG (đường thẳng khác) vừa chia làm đôi vừa vuông góc, suy ra tâm của hình tròn ABC nằm trên NO [HQ. MĐ. 3.1]. Mà nó cũng đã được chứng tỏ (là) nằm trên AC. Và hai đường thẳng AC và NO không gặp nhau tại (điểm) nào khác ngoài P. Suy ra, điểm P là tâm của hình tròn ABC. Nên, tương tự, cũng có thể chỉ ra rằng P cũng là tâm của hình tròn DEF. Suy ra, hai đường tròn cắt nhau, ABC và DEF, có cùng tâm P. Điều này là không thể [MĐ. 3.5].

Như vậy, một hình tròn cắt một hình tròn (khác) tại không quá hai điểm. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 11:</u> Nếu hai đường tròn nội tiếp nhau, và tâm của chúng đã biết trước thì đường thẳng nối hai tâm, khi kéo dài, sẽ đi qua giao điểm của hai đường tròn.

Cho hai hình tròn ABC và ADE nội tiếp nhau tại điểm A, và cho F là tâm của hình tròn ABC [MĐ. 3.1], và G là tâm của (hình tròn) ADE [MĐ. 3.1]. Có thể phát biểu rằng đường thẳng nối G với F, khi được kéo dài, sẽ gặp A.

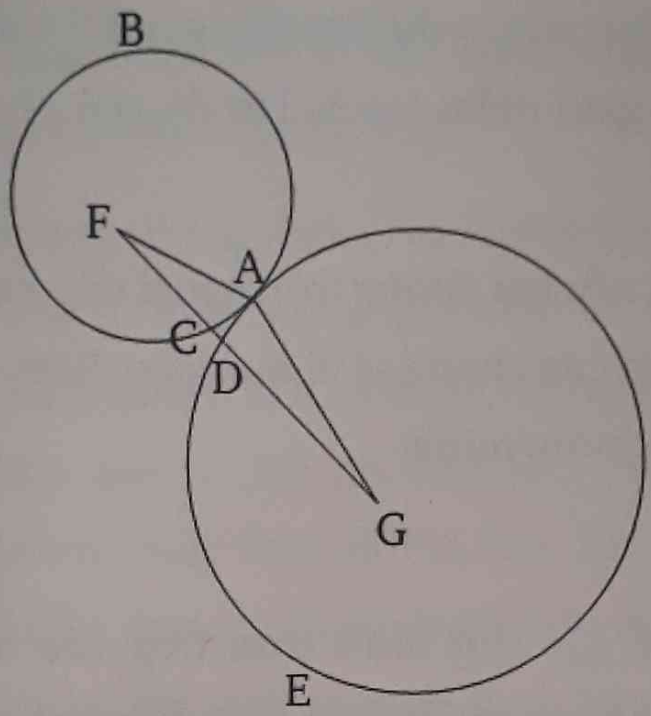
Bởi vì nếu không thì giả sử cho là nó được vẽ như FGH (xem hình), và nối A với F và A với G.



Bởi vì tổng AG và GF là lớn hơn FA, nghĩa là lớn hơn FH [MĐ. 1.20], trừ FG khỏi cả hai bên. Suy ra, phần còn lại AG thì dài hơn phần còn lại GH. Và AG bằng với GD. Suy ra, GD thì cũng lớn hơn GH, đoạn ngắn lớn hơn đoạn dài. Điều này là không thể. Suy ra, đường thẳng nối F với G sẽ không nằm ngoài (hình tròn này nhưng bên trong hình tròn kia). Nó sẽ đi qua giao điểm (của hai hình tròn) tại điểm A.

Như vậy, nếu hai hình tròn nội tiếp nhau, [và tâm của chúng là xác định], thì đường thẳng nối tâm, [được kéo dài], sẽ đi qua giao điểm của hai đường tròn. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 12:</u> Nếu hai hình tròn ngoại tiếp nhau thì đường (thẳng) nối tâm của chúng sẽ đi qua giao điểm.



Cho hai hình tròn ABC và ADE ngoại tiếp nhau tại điểm A, và cho F là tâm của ABC được xác định [MĐ. 3.1], và G là tâm của ADE cũng vậy [MĐ. 3.1]. Có thể phát biểu rằng đường thẳng nối F với G sẽ đi qua giao điểm tại A.

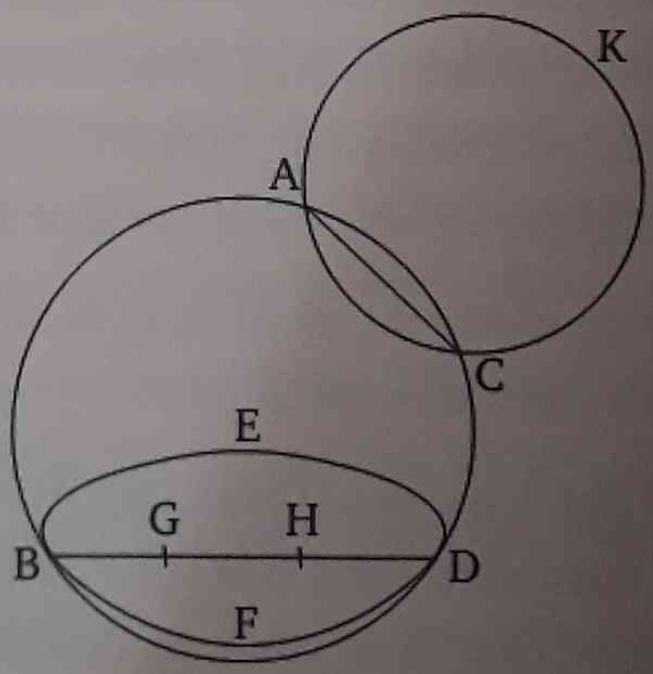
Bởi vì nếu không thì giả sử là nó đi như FCDG (xem hình), và nối A với F và A với G.

Bởi vì điểm F là tâm của hình tròn ABC nên FA bằng với FC. Hơn nữa, bởi vì điểm G là tâm của hình tròn ADE, nên GA bằng với GD. Và FA cũng vừa được chỉ ra (là) bằng

với FC. Suy ra, hai đoạn (thẳng) FA và GA thì bằng với hai đoạn (thẳng) FC và GD. Nên toàn bộ FG thì lớn hơn FA và AG. Nhưng, nó đồng thời lại nhỏ hơn [MĐ. 1.20]. Điều này là không thể. Suy ra đường thẳng nối F với G không thể không đi qua giao điểm tại A. Do đó (nó sẽ đi) qua điểm [A] đó.

Như vậy, nếu hai đường tròn ngoại tiếp nhau thì đường [thẳng] nối tâm của chúng sẽ đi qua giao điểm. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 13:</u> Một hình tròn tiếp xúc với một hình tròn khác tại không nhiều hơn một điểm, cho dù chúng là nội hay ngoại tiếp.



Bởi vì nếu không thì giả sử là hình tròn ABDC tiếp xúc với hình tròn EBFD - trước tiên, là nội tiếp - tại nhiều hơn một điểm, D và B.

Và xác định được tâm G của hình tròn ABDC [MĐ. 3.1], và tâm H của EBFD [MĐ. 3.1].

Suy ra, đường (thẳng) nối G và H sẽ đi qua B và D [MĐ. 3.11]. Cho là BGHD được dựng như hình vẽ. Và bởi vì điểm G là tâm của hình tròn ABDC, nên BG bằng với GD. Suy ra, BG dài hơn HD. Suy ra, BH dài hơn HD. Hơn nữa, bởi vì điểm H là tâm của hình tròn EBFD, nên BH bằng với HD. Nhưng nó [BH] đã được chứng tỏ là dài hơn đoạn này [HD]. Điều này là không thể. Suy ra, một hình tròn nội tiếp một hình tròn (khác) tại không quá một điểm.

Bây giờ, xét phát biểu rằng chúng cũng vậy, khi ngoại tiếp.

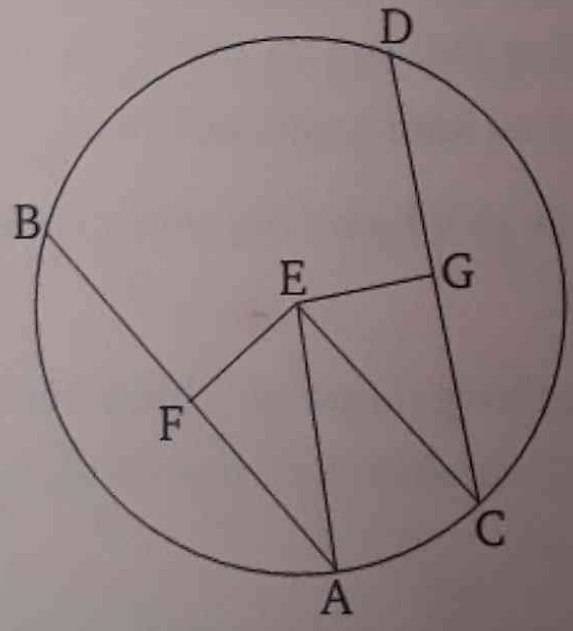
Bởi vì nếu không thì giả sử là hình tròn ACK ngoại tiếp hình tròn ABDC tại nhiều hơn một điểm, là A và C. Và nối A với C.

Bởi vì hai điểm, A và C, được lấy tuỳ ý trên đường chu vi của mỗi hình tròn ABDC và ACK, cho nên đoạn thẳng nối hai điểm này sẽ nằm bên trong mỗi hình tròn [MĐ. 3.2]. Nhưng nó lại nằm bên trong ABDC, và bên ngoài ACK [ĐN.

3.3]. Điều này là vô lý. Suy ra, một hình tròn ngoại tiếp một hình tròn (khác) tại không quá một điểm. Và cũng vừa chứng tỏ rằng khi nội tiếp cũng vậy.

Như vậy, một hình tròn tiếp xúc với một hình tròn (khác) tại không quá một điểm, dù là nội hay ngoại tiếp. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 14:</u> **Trong một hình tròn, các đoạn thẳng bằng nhau thì cách đều tâm, và các đoạn (thẳng) cách đều tâm thì bằng nhau.**



Gọi ABDC là hình tròn đang xét, và AB và CD là các đoạn thẳng bằng nhau nằm trong nó. Có thể phát biểu rằng AB và CD cách đều tâm.

Bởi tâm của hình tròn ABDC là xác định được [MĐ. 3.1], và gọi nó là E. Và dựng EF và EG từ điểm E, lần lượt vuông góc với AB và CD [MĐ. 1.12]. Và nối A với E, E với C.

Bởi vì đoạn thẳng bất kỳ EF, qua tâm (của hình tròn), cắt một đoạn thẳng AB (khác) không qua tâm theo góc vuông, nên nó cũng đồng thời chia đôi đoạn ấy [MĐ. 3.3]. Suy ra, AF bằng với FB. Suy ra, AB dài gấp đôi AF. Nên, cũng lý do như vậy, CD cũng dài gấp đôi CG. Và AB thì bằng CD. Suy ra, AF cũng bằng CG. Và một khi AE bằng EC, thì bình phương AE cũng bằng bình phương EC. Nhưng, tổng bình phương AF và EF bằng bình phương AE. Bởi góc tại F là góc vuông [MĐ. 1.47]. Suy ra, tổng bình phương của AE và FE thì bằng tổng bình phương của CG và GE, mà trong đó bình phương AF thì bằng với bình phương CG. Bởi vì AF thì bằng CG. Suy ra, bình phương FE còn lại bằng với bình phương EG còn lại. Suy ra, EF bằng với EG. Và các đường thẳng trong hình tròn được gọi là cách đều tâm khi đường (thẳng) vuông góc mà được vẽ từ tâm đến nó là bằng nhau [ĐN. 3.4]. Suy ra, AB và CD là cách đều tâm.

Bây giờ cho các đoạn thẳng AB và CD là cách đều tâm. Điều đó nghĩa là, cho EF thì bằng với EG. Có thể phát biểu rằng AB cũng bằng CD.

Bởi, cũng phép dựng như vậy, tương tự có thể chỉ ra

Vrằng AB dài gấp đôi AF, và CD gấp đôi CG. Và mội khi AE bằng với CE, thì bình phương AE thì bằng với bình phương CE. Nhưng, tổng bình phương AF và FA thì bằng với bình phương AE [MĐ. 1.47]. Và tổng bình phương EG và GC bằng với bình phương CE [MĐ. 1.47]. Suy ra, tổng bình phương EF và FA thì bằng với tổng bình phương EG và GC, mà trong đó bình phương EF đã bằng với bình phương EG. Bởi EF bằng với EG. Suy ra, bình phương AF còn lại thì bằng với bình phương CG còn lại. Suy ra, AF bằng CG. Và A thì gấp đôi AF, và CD gấp đôi CG. Suy ra, AB bằng với CD.

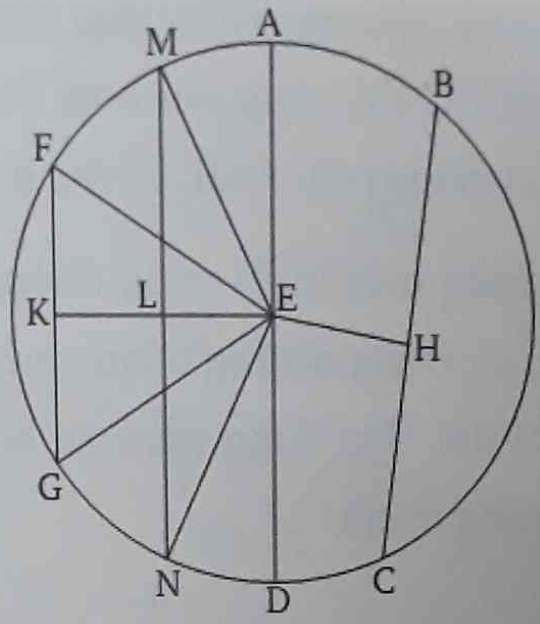
Như vậy, trong một hình tròn, các đoạn thẳng bằng nhau thì cách đều tâm, và các đoạn (thẳng) mà cách đều tâm thì bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 15:</u> Trong một hình tròn, đường kính là đoạn thẳng dài nhất, và trong những đoạn còn lại, đoạn (thẳng) nằm gần tâm thì luôn dài hơn đoạn thẳng nằm cách xa hơn.

Gọi ABCD là hình tròn, AD là đường kính của nó, và E (là) tâm. Và cho BC nằm gần đường kính AD[10], và FG ở xa hơn. Có thể phát biểu rằng AD là đoạn (thẳng) dài nhất, và

10 Euclid nên viết là "tâm" thay vì "đường kính AD", bởi vì BC, AD và FG không nhất thiết phải song song.

BC (thì) dài hơn FG.



Tại tâm E, dựng EH và EK lần lượt vuông góc với BC và FG [MĐ. 1.12]. Và bởi vì BC gần tâm hơn, còn FG ở xa hơn, suy ra EK dài hơn EH [ĐN. 3.5]. Cho EL bằng với EH [MĐ. 1.3]. Và LM được vẽ qua L, vuông góc với EK [MĐ. 1.11], cho là nó được vẽ qua N. Và nối M với E, E với N, F với E và E với G.

Và vì EH bằng với EL, nên BC cũng bằng với MN [MĐ. 3.14]. Hơn nữa, AE bằng với EM, và ED bằng với EN, suy ra AD thì bằng tổng ME và EN. Nhưng tổng ME và EN lớn hơn MN [MĐ. 1.20] [cũng là AD lớn hơn MN], và MN bằng với BC. Suy ra, AD lớn hơn BC. Và vì hai đoạn đường (thẳng) ME, EN lần lượt bằng với hai đoạn (thẳng) FE, EG, và góc

MEN lớn hơn góc FEG[11] suy ra cạnh đáy MN lớn hơn cạnh đáy FG [MĐ. 1.24]. Nhưng, MN cũng vừa được chỉ ra (là) bằng với BC [nên BC thì cũng lớn hơn FG]. Suy ra, đường kính AD là đoạn (thẳng) dài nhất, và BC dài hơn FG.

Như vậy, trong một hình tròn, đường kính (là) đoạn (thẳng) dài nhất, và trong những đoạn còn lại, đoạn (thẳng) nằm gần tâm thì dài hơn đoạn nằm xa hơn. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 16:</u> Một đường (thẳng) được vẽ vuông góc với đường kính của hình tròn ở một đầu của nó sẽ nằm bên ngoài hình tròn. Và không một đường thẳng nào khác[12] có thể chen vào giữa đường thẳng nói trên và đường tròn. Và góc do đường thẳng đó tạo với nửa chu vi hình tròn thì lớn hơn bất kỳ góc thẳng nhọn nào, và góc còn lại (thì) nhỏ hơn bất kỳ góc thẳng nhọn nào[13].

Gọi ABC là hình tròn tâm D và đường kính AB. Có

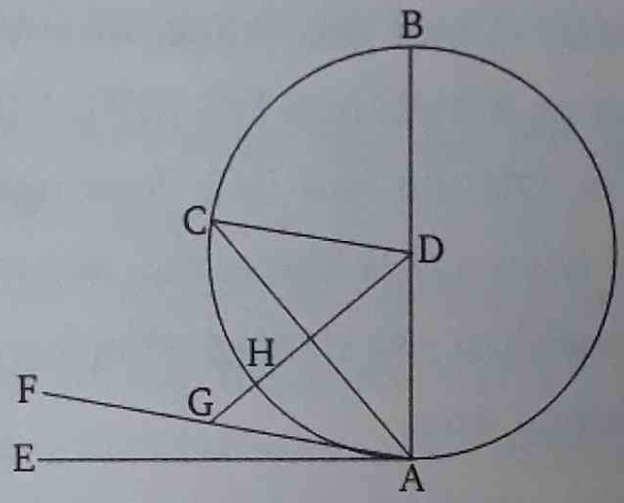
---

11 Điều này không phải lúc nào cũng đúng, trừ trường hợp như của hình vẽ.

12 Ở đây, "đường thẳng nào khác" phải được hiểu là "đường thẳng nào khác vuông góc với đường kính tại đầu mút". (ND)

13 Ở đây, ngụ ý của tác giả là góc tạo giữa đường tròn và đường kính của nó ở đầu mút là góc nhọn lớn nhất, tức là góc vuông; và góc tạo giữa đường tròn và tiếp tuyến là góc nhọn nhỏ nhất, tức là bằng 0 độ. Xem phần chứng minh. (ND)

thể phát biểu rằng đường (thẳng) vẽ được từ A, vuông góc với AB [MĐ. 1.11] ở một đầu mút của nó, sẽ nằm bên ngoài hình tròn.



Bởi vì nếu không như vậy thì có thể giả sử là nó nằm bên trong, như CA, và nối D với C.

Bởi vì DA bằng với DC, nên góc DAC cũng bằng với góc ACD [MĐ. 1.5]. Và DAC (là) một góc vuông. Suy ra, ACD cũng là một góc vuông. Nên, trong tam giác ACD, hai góc DAC và ACD bằng nhau và bằng hai góc vuông. Điều này là không thể [MĐ. 1.17]. Suy ra, đường (thẳng) vẽ được từ điểm A, vuông góc với BA, sẽ không rơi vào bên trong hình tròn. Tương tự, cũng có thể chỉ ra rằng nó không thể nằm trên chu vi hình tròn. Suy ra, nó sẽ nằm bên ngoài (hình tròn).

Cho đường thẳng đó nằm như AE trong hình. Có thể phát biểu rằng không đường thẳng nào khác có thể chen vào

giữa đường thẳng AE và đường tròn CHA.

Bởi, nếu ngược lại, cho là nó được chèn vào như FA trong hình, và dựng DG từ điểm D, vuông góc với FA [MĐ. 1.12]. Và vì AGD là một góc vuông, và DAG nhỏ hơn một góc vuông, suy ra AD dài hơn DG [MĐ. 1.19]. Và DA bằng với DH. Suy ra, DH lớn hơn DG, đoạn ngắn hơn lớn hơn đoạn dài hơn. Điều này là không thể. Suy ra, không đường thẳng nào có thể chen vào khoảng trống ở giữa đường thẳng đó (AE) với đường tròn.

Và cũng phát biểu rằng góc của nửa chu vi hình tròn là góc kẹp giữa đường thẳng BA và đường tròn CHA lớn hơn bất cứ góc thẳng nhọn nào, và góc còn lại, kẹp giữa đường tròn CHA và đường thẳng AE, nhỏ hơn bất kỳ góc thẳng nhọn nào.

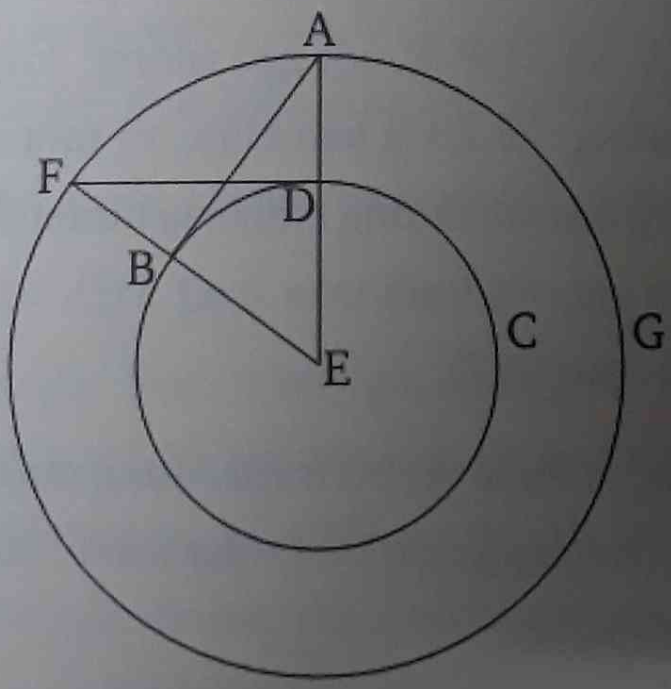
Bởi nếu có bất kỳ góc thẳng nào lớn hơn góc kẹp giữa đường thẳng BA và đường tròn CHA, hay nhỏ hơn góc kẹp giữa đường tròn CHA và đường thẳng AE, thì có thể chèn được một đường thẳng vào khoảng trống ở giữa đường tròn CHA và đường thẳng AE – bất kỳ (đường nào) mà sẽ tạo góc kẹp giữa hai đường thẳng lớn hơn góc kẹp giữa đường thẳng BA và đường tròn CHA, hay nhỏ hơn góc kẹp giữa đường tròn CHA và đường thẳng AE. Nhưng không thể chèn vào được một đường thẳng như vậy. Suy ra, góc nhọn tạo bởi

đường thẳng là không thể lớn hơn góc kẹp giữa đường thẳng BA và đường tròn CHA, cũng như không thể nhỏ hơn góc kẹp giữa đường tròn CHA và đường thẳng AE.

Hệ quả

Nên, từ đây, hiển nhiên rằng một đường (thẳng) được vẽ vuông góc với đường kính của một hình tròn ở đầu mút của nó sẽ tiếp xúc với hình tròn [và đường thẳng đó tiếp xúc với hình tròn tại chỉ một điểm, bởi đã chứng minh rằng nếu một đường thẳng cắt hình tròn tại hai điểm thì sẽ nằm bên trong nó [MĐ. 3.2]. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 17:</u> Từ một điểm cho trước, hãy dựng một đường thẳng tiếp xúc với một hình tròn cho trước.



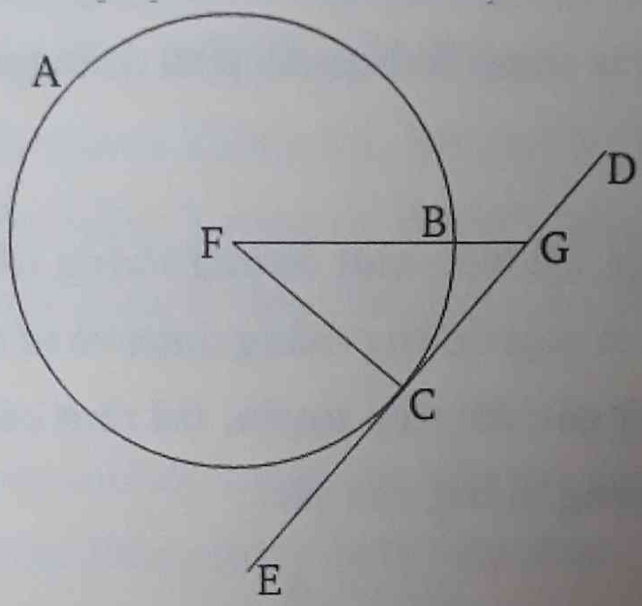
Gọi A là điểm cho trước, và BCD là hình tròn cho trước. Yêu cầu từ điểm A dựng một đường thẳng tiếp xúc với hình tròn BCD.

Xác định được tâm E của hình tròn [MĐ. 3.1], và nối A với E. Và vẽ hình tròn AFG với tâm E và bán kính EA. Từ điểm D vẽ DF góc vuông với EA [MĐ. 1.11]. Và nối E với F, A với B. Có thể phát biểu rằng đường (thẳng) AB được vẽ từ điểm A tiếp xúc với hình tròn BCD.

Bởi vì E là tâm của các hình tròn BCD và AFG, suy ra AE bằng với EF, và ED bằng với EB. Nên hai đoạn thẳng AE, EB lần lượt bằng với hai đoạn thẳng FE, ED. Và chúng cùng tạo một góc chung tại E. Suy ra, cạnh đáy DF bằng cạnh đáy AB, tam giác DEF bằng với tam giác EBA, và các góc còn lại bằng với các góc tương ứng còn lại [MĐ. 1.4]. Suy ra, EDF bằng với EBA. Và EDF là một góc vuông. Suy ra, EBA cũng là một góc vuông. Và EB là bán kính. Và một đường (thẳng) được vẽ vuông góc với đường kính của hình tròn tại tận cùng của nó sẽ tiếp xúc với hình tròn [HQ. MĐ. 3.16]. Suy ra, AB tiếp xúc hình tròn BCD.

Như vậy, từ điểm A cho trước, dựng được đường thẳng AB tiếp xúc với đường tròn BCD cho trước. Đây chính là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 18:</u> Nếu một đường thẳng tiếp xúc một hình tròn, và một đường thẳng khác được nối từ tâm của hình tròn đến điểm tiếp xúc, thì đường thẳng được nối sẽ vuông góc với đường thẳng tiếp xúc đó.



Cho đường thẳng DE tiếp xúc hình tròn ABC tại điểm C, và xác định được tâm F của hình tròn ABC [MĐ. 3.1], và nối F với C. Có thể phát biểu rằng FC vuông góc với DE.

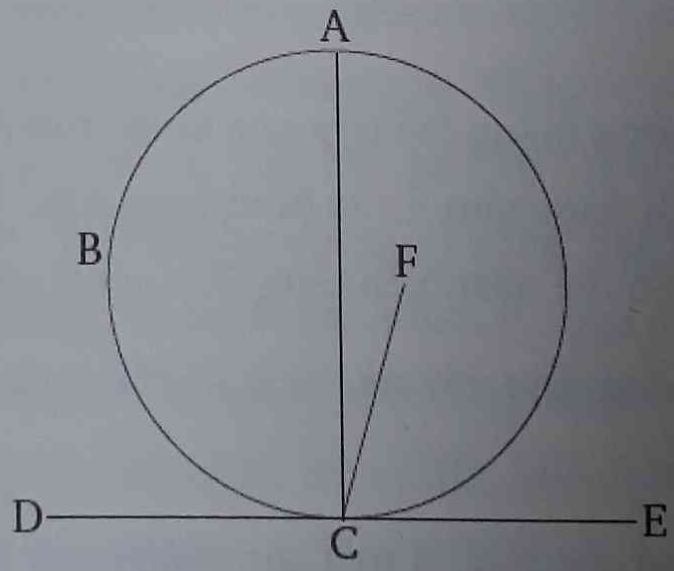
Nếu không như vậy nè, từ F vẽ FG vuông góc với FE [MĐ. 1.12].

Khi đó, vì góc FGC là một góc vuông, suy ra góc FCG là góc nhọn [MĐ. 1.17]. Và góc lớn hơn thì bị chắn bởi cạnh dài hơn [MĐ. 1.19]. Suy ra, FC dài hơn FG. Và FC bằng với FB. Suy ra, FB thì9f cũng dài hơn FG, đoạn ngắn hơn lớn hơn đoạn dài hơn. Điều này là không thể. Suy ra, FG không vuông vóc

với DE. Nên tương tự, cũng có thể chỉ ra rằng không có đường (thẳng) nào khác ngoài FC. Suy ra, FC vuông góc với DE.

Như vậy, nếu đường thẳng tiếp xúc một hình tròn, và một đường thẳng khác được nối từ tâm của hình tròn đến điểm tiếp xúc, thì đường thẳng được nối sẽ vuông góc với đường thẳng tiếp xúc đó. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 19:</u> Nếu một đường thẳng tiếp xúc với một đường tròn, và một đường thẳng được vẽ từ tiếp điểm, theo hướng vuông góc với tiếp tuyến, thì tâm của hình tròn sẽ nằm trên đường thẳng vừa vẽ.



Giả sử đường thẳng DE bất kỳ tiếp xúc với hình tròn ABC tại điểm C. Và vẽ CA từ C, theo phương vuông góc với DE [MĐ. 1.11]. Có thể phát biểu rằng tâm của hình tròn nằm trên AC.

Giả sử nếu không phải như thế, có thể đặt F là tâm của hình tròn, và nối đoạn CF.

Như vậy, bởi vì đường DE nào đó tiếp xúc với hình tròn ABC, và FC nối từ tâm đến tiếp điểm, nên FC vuông góc với DE [MĐ. 3.18]. Khi đó, FCE là một góc vuông. Và ACE cũng là một góc vuông. Vậy, FCE bằng ACE, góc nhỏ hơn bằng góc lớn hơn. Điều này là không thể. Bởi thế, F không phải là tâm của hình tròn ABC. Tương tự, có thể chứng minh rằng không có điểm nào khác là tâm của hình tròn, trừ một điểm nằm trên AC.

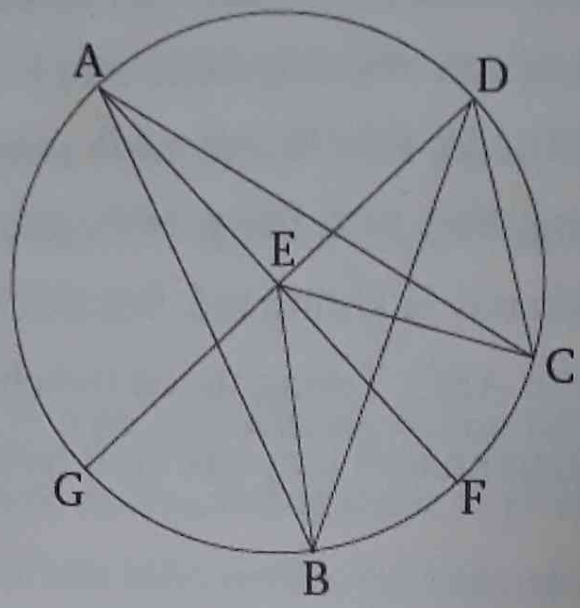
Như vậy, nếu một đường thẳng tiếp xúc với một đường tròn, và một đường thẳng được vẽ từ tiếp điểm, theo hướng vuông góc với tiếp diện, thì tâm của hình tròn sẽ nằm trên đường thẳng vừa vẽ. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 20:</u> Trong một hình tròn, góc ở tâm là gấp đôi góc nội tiếp[14] khi các góc cùng chắn một cung.

Cho hình tròn ABC, và BEC là góc ở tâm, BAC là góc

14 Nguyên văn như sau: "In a circle, the angle at the center is double that at the circumference…", dịch nghĩa là, "Trong một hình tròn, góc [có gốc đặt] tại tâm thì gấp đôi góc [có gốc nằm] trên cung tròn…". Ở đây, người dịch dùng một khái niệm quen thuộc trong tiếng Việt là 'góc nội tiếp', nghĩa là, góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh là hai dây cung. Khái niệm này vốn không được Euclid định nghĩa trong tác phẩm Elements. (ND)

nội tiếp. Và chúng cùng chắn cung BC. Có thể phát biểu rằng góc BEC gấp đôi góc BAC.



Để nối các điểm, hãy kéo dài AE đến F.

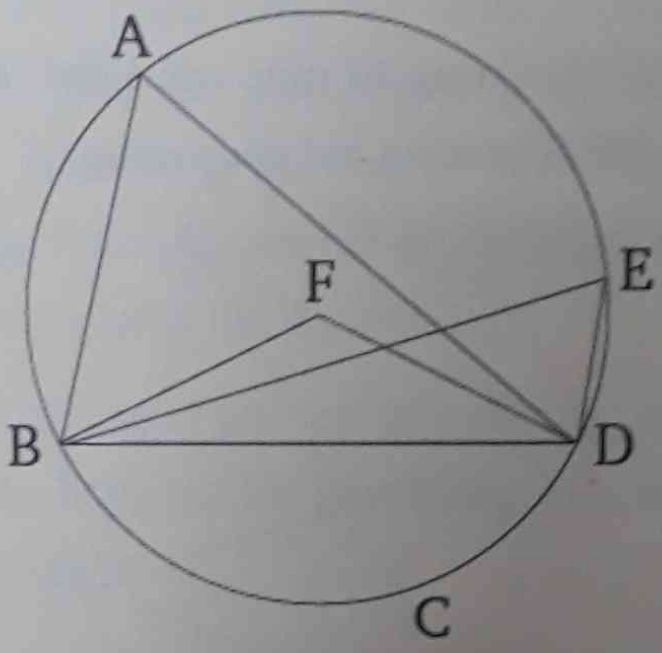
Như vậy, bởi EA bằng EB nên góc EAB bằng góc EBA [MĐ. 1.5]. Tổng EAB và EBA là gấp đôi EAB. Và BEF bằng EAB cộng với EBA [MĐ. 1.32]. Cho nên BEF cũng gấp đôi EAB. Vì thế, với cùng cách lập luận, FEC gấp đôi EAC. Vậy, góc tổng BEC gấp đôi góc tổng BAC.

Hãy xét một đoạn thẳng khác, và có một góc khác, BDC. Nối DE, kéo dài đến G. Như vậy, tương tự, có thể chứng minh rằng góc GEC gấp đôi góc EDC, theo đó thì BEC gấp đôi (góc còn lại) BDC.

Như vậy, trong một hình tròn, góc ở tâm thì gấp đôi

góc nội tiếp, khi chúng cùng chắn một cung. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 21:</u> Trong một hình tròn, các góc nội tiếp của cùng một hình viên phân thì bằng nhau.



Cho hình tròn ABCD, và BAD và BED là các góc trong cùng viên phân BAED. Có thể phát biểu rằng BAD và BED là bằng nhau.

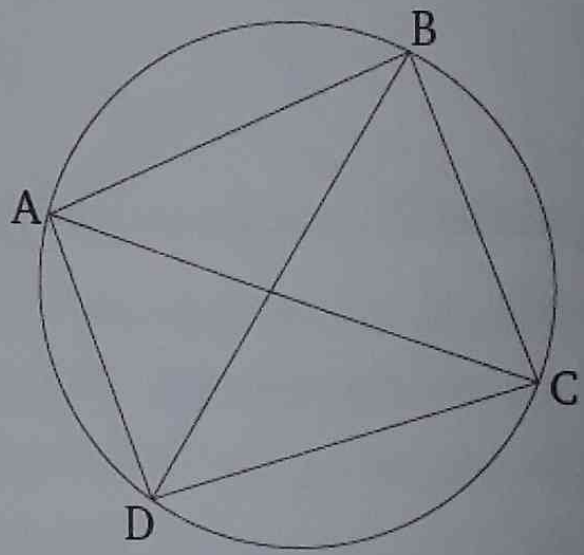
Theo đó, xác định được tâm của hình tròn ABCD [MĐ. 3.1] và gọi là điểm F. Và nối các đoạn BF và DF.

Và vì góc BFD là góc ở tâm, BAD là góc nội tiếp, và chúng cùng chắn cung BCD, nên góc BFD gấp đôi BAD

[MĐ. 3.20]. Như thế, suy luận theo cùng cách đó, BFD cũng gấp đôi BED. Vậy BAD bằng BED.

Như vậy, trong một hình tròn, các góc nội tiếp của cùng một viên phân là bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 22:</u> Trong tứ giác nội tiếp[15] hình tròn thì tổng các góc đối diện bằng hai góc vuông.



Cho hình tròn ABCD, và ABCD là tứ giác nội tiếp hình tròn đó. Có thể phát biểu rằng tổng các góc đối diện bằng hai góc vuông.

Nối A với C và B với D.

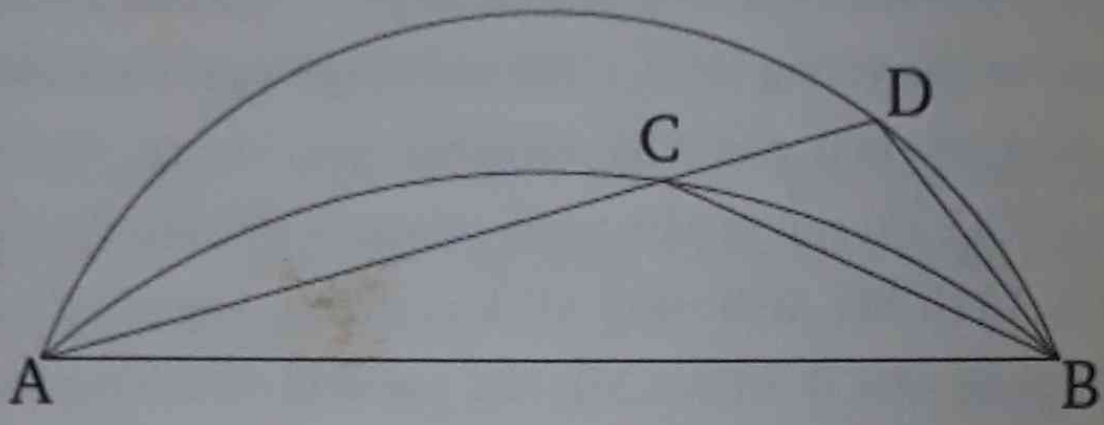
15 Nguyên văn là "within", nghĩa là mọi tứ giác 'nằm trong' một hình tròn đều có tính chất này: tổng hai góc đối diện thì bằng hai vuông. Euclid chỉ chứng minh trường hợp tổng quát nhất, như hình vẽ. Xem thêm chú thích của Richard Fitzpatrick cho MĐ. 2, Q1. (ND)

Như vậy, bởi vì tổng ba góc của bất kì tam giác nào đều bằng hai góc vuông [MĐ. 1.32], nên tổng ba góc CAB, ABC và BCA của tam giác ABC bằng hai (góc) vuông. Và CAB bằng BDC. Do chúng nằm trong cùng một viên phân BADC [MĐ. 3.21]. Mà ACB bằng ADB, vì chúng cùng trong một viên phân ADCB [MĐ. 3.21]. Vậy, góc tổng ADC bằng BAC cộng với ACB. Hãy cộng ABC vào cả hai vế. Thì, góc ABC, BAC cộng ACB bằng góc ABC cộng ADC. Mà, góc ABC, BAC cộng góc ACB bằng hai vuông. Vậy ABC cộng ADC bằng hai vuông. Tương tự, có thể chứng minh rằng các góc BAD và DCB cũng bằng hai góc vuông.

Như vậy, với các tứ giác nội tiếp các hình tròn thì tổng các góc đối diện bằng hai lần góc vuông. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 23:</u> Không thể dựng hai hình viên phân đồng dạng và không bằng nhau ở về cùng một phía của cùng một đoạn thẳng.

Bởi vì, giả sử có hai hình viên phân đồng dạng và không bằng nhau ACB và ADB được dựng ở về cùng một phía của đoạn thẳng AB. Vẽ đoạn ACD trong hình viên phân, và nối các đoạn CB và DB.



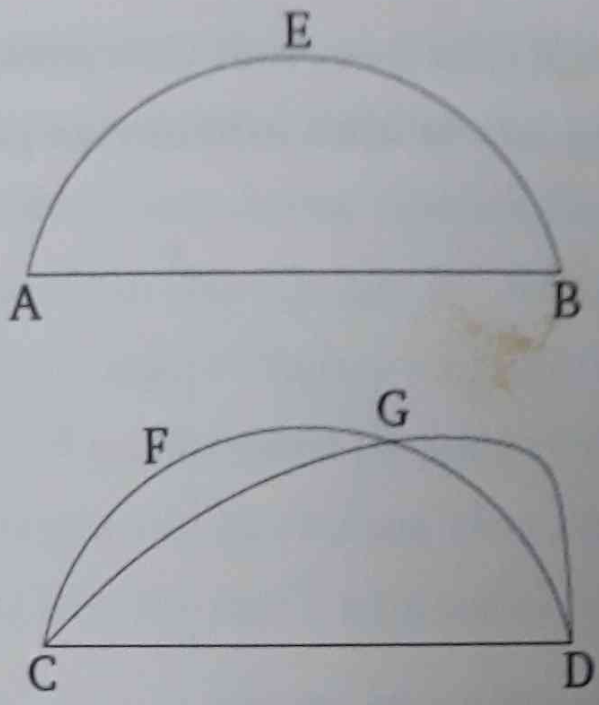
Như thế, vì viên phân ACB là đồng dạng với ADB, và các viên phân đồng dạng thì nhận các góc chắn cung bằng nhau [ĐN. 3.11], nên góc ACB bằng góc ADB, góc ngoài bằng góc trong. Điều này là không thể [MĐ. 1.16]

Như vậy, không thể dựng hai hình viên phân đồng dạng và không bằng nhau ở về cùng một phía của cùng một đoạn thẳng. Đây là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 24:</u> Các hình viên phân đồng dạng dựng trên các đoạn thẳng bằng nhau là bằng nhau.

Gọi AEB và CFD lần lượt là các hình viên phân đồng dạng dựng trên các đoạn thẳng bằng nhau AB và CD. Có thể phát biểu rằng hình viên phân AEB bằng hình viên phân CFD.

Bởi vì, nếu viên phân AEB được chồng lên viên phân CFD, và điểm A chồng lên điểm C, đoạn AB chồng lên đoạn CD, thì điểm B phải trùng với điểm D do AB bằng CD.



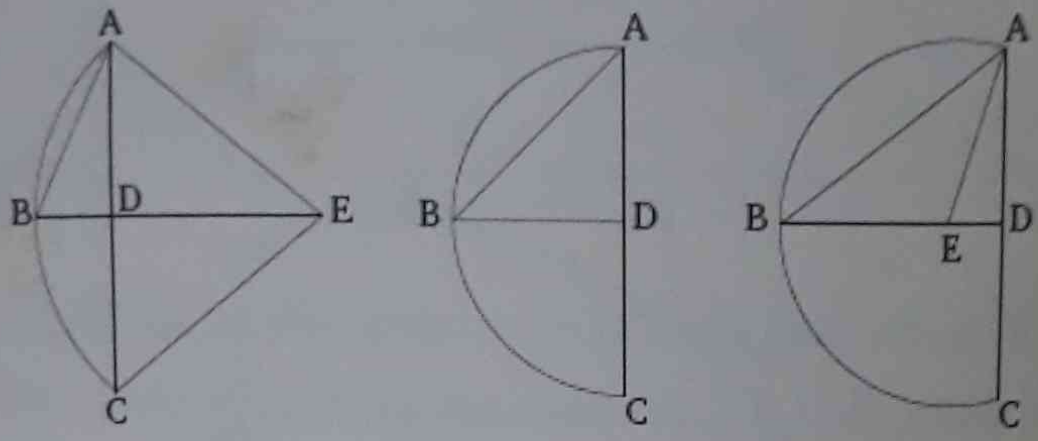
Và nếu AB trùng khít với CD thì viên phân AEB sẽ cũng phải trùng khít với CFD. Vì nếu AB trùng khít với CD mà viên phân AEB không trùng khít với CFD thì nó chắc chắn hoặc là cái này nằm bên trong cái kia, hoặc nằm bên ngoài cái kia[16] hoặc là lệch như CGD trong hình, và như thế thì hình tròn này cắt hình tròn kia ở nhiều hơn hai điểm. Điều này là không thể [MĐ. 3.10]. Khi đó nếu chồng AB lên CD thì viên phân AEB cũng không thể trùng khít với CFD. Vậy thì, nó phải trùng khít và bằng cái kia [TĐ. 4].

Như vậy, các hình viên phân đồng dạng dựng trên các đoạn thẳng bằng nhau là bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

---

16 Cả hai khả năng này, lẫn giả định trước đó, đều là không thể xảy ra, nếu xét theo MĐ. 3.23.

<u>Mệnh đề 25:</u> Cho trước một viên phân của hình tròn, hãy vẽ phần còn lại của hình tròn từ viên phân đó.



Gọi ABC là viên phân của một hình tròn. Yêu cầu đặt ra là hoàn chỉnh hình tròn ABC, là hình tròn nhận ABC là một hình viên phân.

Chia AC thành hai phần bằng nhau tại điểm D [MĐ. 1.10], và từ D vẽ đoạn DB vuông góc với AC [MĐ. 1.11]. Nối đoạn AB. Như vậy, góc ABD hoặc là lớn hơn, hoặc là bằng hoặc là nhỏ hơn góc BAD.

Đầu tiên, xét trường hợp lớn hơn. Tại điểm A trên đoạn BA, dựng góc BAE bằng với góc ABD [MĐ. 1.23]. Kéo dài BD đến E, nối đoạn EC. Như vậy, bởi góc ABE bằng góc BAE cho nên đoạn EB cũng bằng đoạn EA [MĐ. 1.6]. Và do AD bằng DC, còn DE là chung nên hai đoạn AD, DE lần lượt bằng với hai đoạn AD, DE. Và góc ADE bằng góc CDE. Do cả hai đều là góc vuông. Như vậy cạnh AE bằng cạnh CE

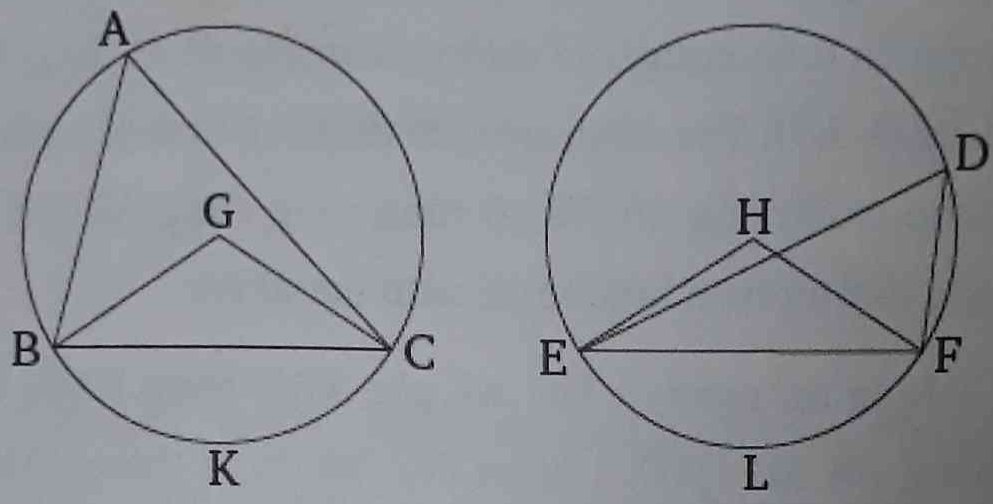
[MĐ. 1.4]. Nhưng AE đã được chứng tỏ là bằng BE. Vậy BE cũng bằng CE. Suy ra ba đoạn thẳng AE, EB và EC là bằng nhau. Khi đó, nếu vẽ một đường tròn có tâm tại E, bán kính là một trong ba đoạn AE, EB hay EC thì nó sẽ đi qua các điểm còn lại (của cung), và đường tròn cần vẽ đã được hoàn chỉnh [MĐ. 3.9]. Vậy, hình tròn đã được vẽ từ một hình viên phân cho trước của nó. Và rõ ràng rằng cung ABC là nhỏ hơn nửa đường tròn bởi tâm E nằm ngoài nó.

Tương tự, ngay cả khi mà góc ABD bằng BAD, thì vì AD bằng với BD [MĐ. 1.6] và DC, ba đoạn thẳng DA, DB và DC sẽ bằng nhau. Và điểm D là tâm của hình tròn cần vẽ. Khi đó ABC rõ ràng là nửa hình tròn.

Và nếu ABD nhỏ hơn BAD, dựng góc BAE bằng với ABD trên cạnh BA, tại điểm A trên đó [MĐ. 1.23], thì tâm của hình tròn nằm trên DB, bên trong viên phân ABC. Và rõ ràng là viên phân ACB lớn hơn nửa hình tròn.

Như vậy, đã vẽ được một hình tròn từ một hình viên phân cho trước. Đó là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 26:</u> Trong các hình tròn bằng nhau, các góc bằng nhau chắn các cung bằng nhau, cho dù chúng là góc ở tâm hay góc nội tiếp[17].



Cho ABC và DEF là các hình tròn bằng nhau, bên trong chúng có các góc BGC và FHF là các góc ở tâm bằng nhau, và BAC và EDF là các góc nội tiếp bằng nhau.

Nối các đoạn BC và EF.

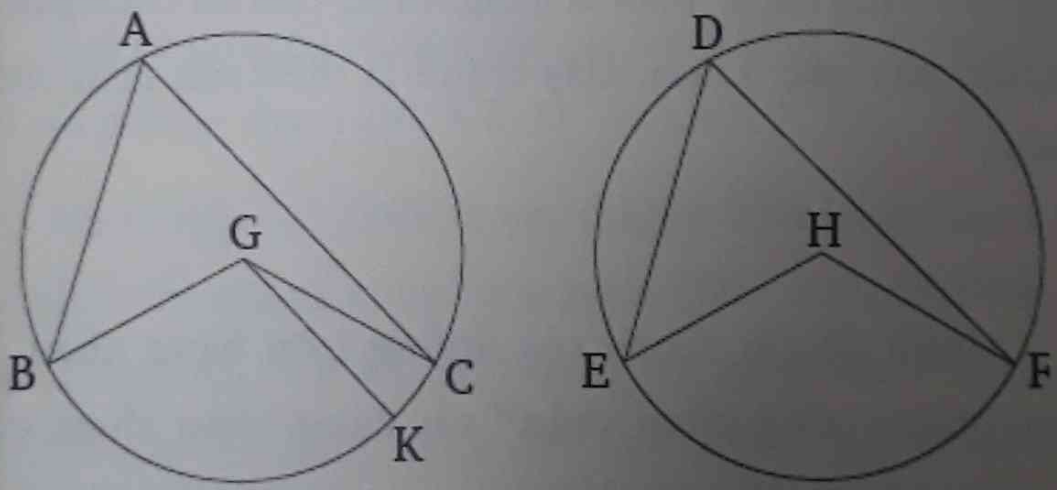
Vì các hình tròn ABC và DEF là bằng nhau nên bán kính của chúng bằng nhau. Vậy các đoạn thẳng BG, GC lần lượt bằng với EH, HF. Và góc ở G bằng góc ở H. Như vậy cạnh đáy BC bằng cạnh đáy EF [MĐ. 1.4]. Bởi góc ở A bằng góc ở D nên các viên phân BAC và EDF là đồng dạng [ĐN. 3.11]. Và chúng dựng trên hai đoạn thẳng bằng nhau [BC và EF]. Các viên phân đồng dạng dựng trên các đoạn thẳng

17 Xem chú thích cho MĐ. 3.20 (ND)

bằng nhau là bằng nhau [MĐ. 3.24]. Vậy viên phân BAC bằng EDF. Và hình tròn ABC cũng bằng hình tròn DEF. Như thế thì cung tròn BKC còn lại bằng với cung ELF.

Như vậy, trong các hình tròn bằng nhau, các góc bằng nhau chắn các cung bằng nhau, cho dù chúng là góc ở tâm hay góc nội tiếp. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 27:</u> Trong các đường tròn bằng nhau, các góc chắn các cung bằng nhau là bằng nhau, cho dù chúng là góc nội tiếp[18] hay góc ở tâm.



Cho các góc BGC và EHF nằm ở tâm G và H, và các góc BAC và EDF là các góc nội tiếp, lần lượt chắn các cung BC và EF trong các đường tròn bằng nhau ABC và DEF. Có thể phát biểu rằng góc BGC bằng (góc) EHF, và BAC bằng EDF.

18 Xem chú thích cho MĐ. 20, Q3. (ND)

Giả sử BGC không bằng EHF, thì có một góc lớn hơn. Xem BGC là góc lớn hơn, và tại điểm G trên đoạn BG, dựng góc BGK bằng với EHF [MĐ. 1.23]. Nhưng trong các đường tròn bằng nhau, các góc bằng nhau chắn các cung bằng nhau khi chúng đều là các góc ở tâm [MĐ. 3.26]. Như vậy, cung BK bằng cung EF. Nhưng EF lại bằng BC. Vậy thì, cung BK cũng bằng cung BC, cái nhỏ hơn bằng cái lớn hơn. Điều này là không thể. Như vậy, góc BGC không thể không bằng góc EHF. Như vậy chúng bằng nhau. Và góc ở A bằng nửa BGC, góc tại D bằng nửa EHF. Như thế góc tại A bằng góc tại D.

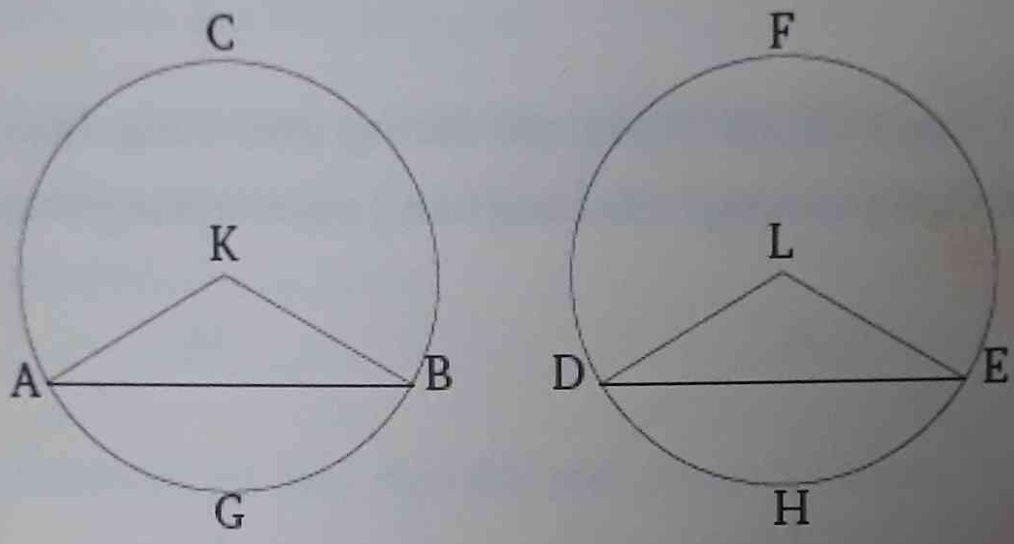
Như vậy, trong các đường tròn bằng nhau, các góc chắn các cung bằng nhau là bằng nhau, cho dù chúng là góc nội tiếp hay góc ở tâm. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 28:</u> Trong các đường tròn bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau chắn[19] các cung bằng nhau, cung lớn hơn bằng với cung lớn hơn, cung nhỏ hơn bằng với cung nhỏ hơn.

Gọi ABC và DEF là các đường tròn bằng nhau, và có AB và DE là các đoạn thẳng bằng nhau trong các đường tròn

19 Nguyên văn là 'cut off'. (ND)

này, chúng lần lượt chắn các cung lớn ACB và DEF, và các cung nhỏ AGB và DHE. Có thể phát biểu rằng cung lớn ACB bằng với cung lớn DFE, và cung nhỏ AGB bằng cung nhỏ DHE.

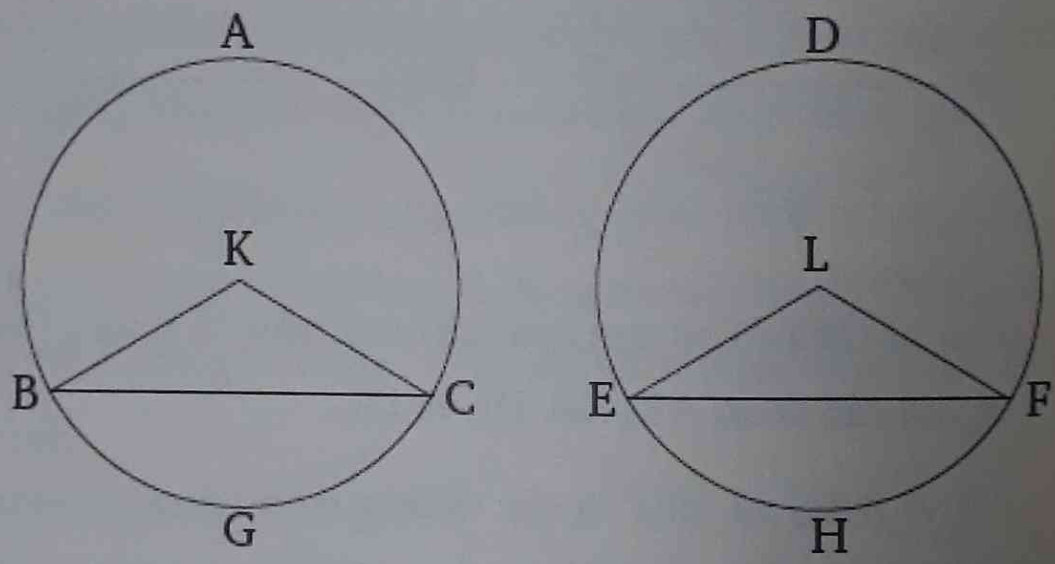


Giả sử rằng đã có tâm của các hình tròn, là K và L [MĐ. 3.1], và nối các đoạn AK, KB, DL và LE.

Và vì ABC và DEF là các đường tròn bằng nhau nên bán kính của chúng cũng bằng nhau [ĐN. 3.1]. Như vậy hai đoạn thẳng AK, KB lần lượt bằng với hai đoạn DL, LE. Và có cạnh đáy AB bằng cạnh đáy DE. Suy ra góc AKB bằng góc DLE [MĐ. 1.8]. Và các góc bằng nhau chắn các cung bằng nhau, khi chúng cùng là các góc ở tâm [MĐ. 3.26]. Suy ra cung AGB bằng cung DHE. Cả đường tròn ABC bằng cả đường tròn DEF. Vậy, cung còn lại của ABC bằng cung còn lại của DFE.

Như vậy, trong các đường tròn bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau chắn các cung bằng nhau, cung lớn hơn bằng với cung lớn hơn, cung nhỏ hơn bằng với cung nhỏ hơn. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 29:</u> Trong các đường tròn bằng nhau, các đoạn thẳng trương[20] các cung bằng nhau là bằng nhau.



Cho ABC và DEF là các đường tròn bằng nhau và trong các đường tròn đó có các cung bằng nhau là BGC và EHF. Và nối các đoạn BC và EF. Có thể phát biểu rằng BC bằng EF.

Tâm của các đường tròn đã biết [MĐ. 3.1], gọi chúng là K và L. Nối các đoạn thẳng BK, KC, EL và LF.

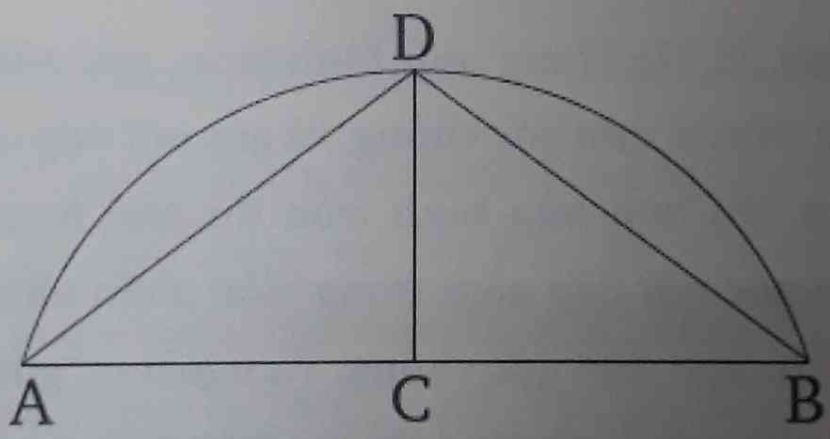
Vì cung BGC bằng cung EHF nên góc BKC cũng bằng

20 Nguyên văn là 'subtend'. (ND)

góc ELF [MĐ. 3.27]. Và vì đường tròn ABC bằng đường tròn DEF nên bán kính của chúng bằng nhau [ĐN. 3.1]. Vậy hai đoạn thẳng BK, KC lần lượt bằng hai đoạn thẳng EL, LF. Và chúng tạo thành các góc bằng nhau. Như vậy, cạnh đáy BC bằng với cạnh đáy EF [MĐ. 1.4].

Như vậy, trong các đường tròn bằng nhau, các đoạn thẳng trương các cung bằng nhau là bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 30:</u> Hãy chia đôi một cung cho trước.



ADB là một cung cho trước. Yêu cầu là chia đôi cung ADB.

Nối đoạn AB và chia đôi nó tại điểm C [MĐ. 1.10]. Từ C vẽ đoạn CD, vuông góc với AB [MĐ. 1.11]. Và nối các đoạn AD và DB.

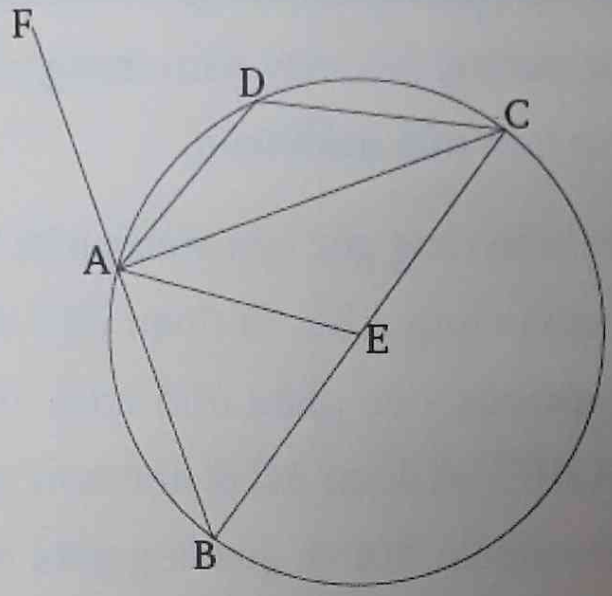
Do AC bằng CB, và CD là cạnh chung nên hai đoạn AC, CD lần lượt bằng hai đoạn BC, CD. Và góc ACD bằng góc BCD. Bởi chúng là các góc vuông. Như vậy cạnh đáy AD bằng cạnh đáy DB [MĐ. 1.4]. Và các đoạn thẳng bằng nhau chắn các cung bằng nhau, cung lớn hơn bằng cung lớn hơn, cung nhỏ hơn bằng cung nhỏ hơn [MĐ. 1.28]. Các cung AD và DB nhỏ hơn nửa đường tròn. Như vậy, cung AD bằng cung DB.

Như vậy, cung cho trước đã được chia đôi ở điểm D. Đó là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 31:</u> Trong một hình tròn, góc nội tiếp nửa hình tròn tròn là một góc vuông, và góc nội tiếp nằm trong viên phân lớn hơn nửa hình tròn thì nhỏ hơn một góc vuông, và góc nội tiếp nằm trong viên phân nhỏ hơn nửa vòng thì lớn hơn một góc vuông. Và ngoài ra, góc của viên phân lớn hơn nửa hình tròn thì lớn hơn một góc vuông, và góc của viên phân nhỏ hơn nửa hình tròn thì nhỏ hơn một góc vuông.

Cho đường tròn ABCD, BC là đường kính và E là tâm. Nối các đoạn BA, AC, AD và DC. Có thể phát biểu rằng góc BAC trong nửa hình tròn BAC là một góc vuông, và góc ABC

trong viên phân ABC lớn hơn nửa hình tròn thì nhỏ hơn một góc vuông, và góc ADC trong viên phân ACD nhỏ hơn nửa hình tròn thì lớn hơn một góc vuông.



Nối AE và kéo dài BA tới F.

Bởi BE bằng EA nên góc ABE cũng bằng góc BAE [MĐ. 1.5]. Vậy, góc BAC bằng hai góc ABC và ACB cộng lại. Và góc FAC, là góc ngoài của tam giác ABC, cũng bằng hai góc ABC và ACB cộng lại [MĐ. 1.32]. Vậy, góc BAC cũng bằng góc FAC. Như thế mỗi góc đó là một góc vuông [ĐN. 1.10]. Vậy góc BAC trong nửa hình tròn BAC là một góc vuông.

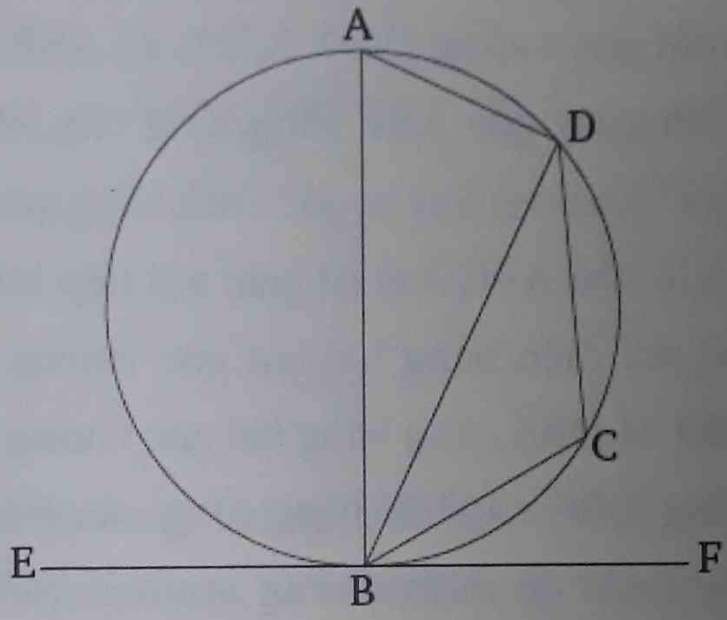
Và bởi vì tổng hai góc ABC và BAC của tam giác ABC là nhỏ hơn hai góc vuông [MĐ. 1.17], mà BAC bằng một góc vuông nên góc ABC là nhỏ hơn một góc vuông. Và nó nằm trong viên phân ABC, là viên phân lớn hơn nửa hình tròn.

Vì ABCD là tứ giác nội tiếp hình tròn, nên tổng hai góc đối diện của tứ giác nội tiếp bằng hai góc vuông [MĐ. 3.22] (như vậy tổng các góc ABC và ADC bằng hai góc vuông), góc ABC là nhỏ hơn một góc vuông. Vậy góc còn lại ADC là lớn hơn một góc vuông. Góc này nằm trong viên phân ADC, là viên phân nhỏ hơn nửa hình tròn.

Cũng phát biểu rằng góc của viên phân lớn hơn, tức là viên phân kẹp giữa cung ABC và đoạn AC, là lớn hơn một góc vuông. Và góc của viên phân nhỏ hơn, tức là viên phân kẹp giữa cung AD(C) và đoạn AC là nhỏ hơn một góc vuông. Điều này là hiển nhiên. Bởi vì, góc kẹp giữa hai đoạn thẳng BA và AC là góc vuông cho nên góc kẹp giữa cung ABC và đoạn AC là lớn hơn một góc vuông. Tương tự, bởi vì góc kẹp giữa AC và AF là góc vuông cho nên góc kẹp giữa cung AD(C) và đoạn AC là nhỏ hơn một góc vuông.

Như vậy, trong một hình tròn, góc nội tiếp nửa hình tròn là một góc vuông, và góc nội tiếp của viên phân lớn hơn nửa hình tròn thì nhỏ hơn một góc vuông, và góc nội tiếp của viên phân nhỏ hơn nửa hình thì lớn hơn một góc vuông. Và ngoài ra, góc của viên phân lớn hơn nửa hình tròn thì lớn hơn một góc vuông, và góc của viên phân nhỏ hơn nửa hình tròn thì nhỏ hơn một góc vuông. Đó chính là yêu cầu cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 32:</u> Nếu một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn và một đường thẳng khác được dựng từ tiếp điểm cắt đường tròn làm hai phần thì các góc kẹp giữa đường thẳng đó và tiếp tuyến sẽ bằng các góc trong các viên phân so le.



Cho đoạn EF tiếp xúc đường tròn ABCD tại điểm B, và từ B vẽ đoạn BD vào phía trong hình tròn ABCD, và chia nó là hai phần. Có thể phát biểu rằng các góc mà BD tạo với tiếp tuyến EF sẽ bằng với các góc nội tiếp các viên phân so le. Có nghĩa là, góc FBD bằng với góc (dựng trong viên phân) BAD, và góc EBD bằng với góc (được dựng trong viên phân) DCB.

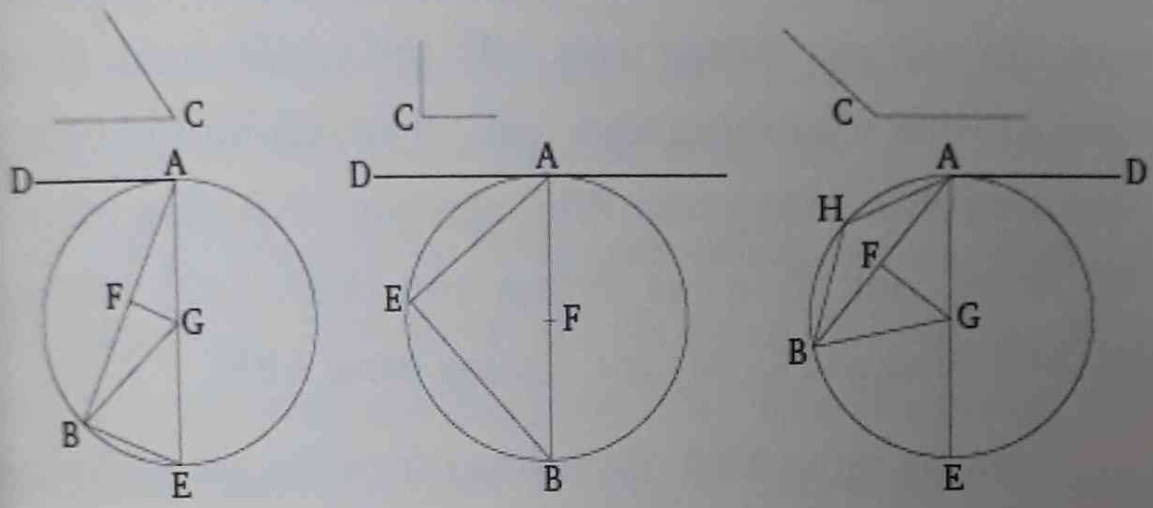
Từ điểm B dựng đoạn BA vuông góc với EF [MĐ. 1.11]. Chọn điểm C là điểm ngẫu nhiên nằm trên cung BD. Nối các đoạn AD, DC và CD.

Bởi đoạn EF tiếp xúc đường tròn ABCD tại điểm B, và

BA được dựng từ tiếp điểm, vuông góc với tiếp tuyến cho nên tâm của đường tròn ABCD nằm trên BA [MĐ. 3.19]. Như vậy BA là đường kính của đường tròn ABCD. Khi đó góc ADB, nằm trong nửa đường tròn, là một góc vuông [MĐ. 3.31]. Vậy tổng các góc còn lại (của tam giác ADB) BAD và ABD bằng một góc vuông [MĐ. 1.32]. Và ABF cũng là một góc vuông. Như vậy góc ABF bằng tổng của BAD và ABD. Trừ ABD khỏi cả hai vế. Suy ra góc DBF bằng góc BAD trong viên phân so le. Do ABCD là tứ giác nội tiếp hình tròn nên tổng các góc đối diện bằng hai lần góc vuông [MĐ. 3.32]. Tổng của DBF và DBE cũng bằng hai góc vuông [MĐ. 1.13]. Cho nên, tổng DBF và DBE bằng tổng của BAD và BCD, trong đó góc BAD đã được chứng minh là bằng góc DBF. Vậy góc còn lại DBE bằng góc DCB trong viên phân so le của đường tròn.

Vậy, nếu một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn và một đường thẳng khác được dựng từ tiếp điểm cắt đường tròn làm hai phần thì các góc kẹp giữa đường thẳng đó và tiếp tuyến sẽ bằng các góc trong các viên phân so le. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 33: Trên một đoạn thẳng cho trước, hãy dựng một cung tròn nhận một góc bằng một góc thẳng cho trước.



Gọi AB là đoạn thẳng cho trước, C là góc thẳng cho trước. Như vậy yêu cầu là vẽ một cung tròn nhận một góc bằng góc C trên đoạn thẳng AB.

Góc C có thể là góc nhọn, góc vuông hay góc tù. Đầu tiên, hãy xét góc nhọn. Như trong hình đầu tiên (từ bên trái), từ điểm A trên đoạn AB, dựng góc BAD bằng với góc C [MĐ. 1.23]. Như thế thì BAD cũng là góc nhọn. Dựng AE vuông góc với DA [MĐ. 1.11]. Và chia đôi AB tại điểm F [MĐ. 1.10]. Vẽ FG từ điểm F vuông góc với AB [MĐ. 1.11]. Nối đoạn GB.

Vì AF bằng FB, và FB là cạnh chung, nên AF, FG lần lượt bằng với BF, FG. Và góc AFG bằng góc BFG. Như vậy cạnh

đáy AG bằng với cạnh đáy BG [MĐ. 1.4]. Khi đó, đường tròn vẽ từ tâm G, có bán kính GA sẽ đi qua B (và A). Vẽ đường tròn đó và gọi nó là ABE. Nối EB. Như vậy, vì AD nằm ở đầu mút của đường kính, tại A, lại vuông góc với AE, cho nên đoạn AD tiếp xúc đường tròn ABE [HQ. MĐ. 3.16]. Đoạn thẳng AD tiếp xúc đường tròn ABE, đoạn AB được vẽ từ tiếp điểm A về phía đường tròn BBE, nên góc DAB bằng với góc AEB trong cung so le của đường tròn [MĐ. 3.32]. Nhưng, góc DAB bằng góc C, vậy góc C cũng bằng AEB.

Như vậy, cung AEB của đường tròn nhận góc AEB bằng với góc C cho trước đã được dựng trên đoạn AB cho trước.

Bây giờ hãy xét C là góc vuông. Và một lần nữa cần vẽ một cung tròn trên đoạn AB, nhận một góc bằng góc vuông. Hạy dựng góc BAD, bằng góc vuông C [MĐ. 1.23], như trong hình thứ hai (từ trái sang). Chia đôi AB tại F [MĐ. 1.10]. Vẽ đường tròn AEB từ tâm F, với bán kính là FA hay FB.

Như vậy, đoạn thẳng AD tiếp xúc đường tròn ABE, do góc tại A là góc vuông [HQ. MĐ. 3.16]. Góc BAD bằng góc trong cung AEB. Bởi vì, nằm trong nửa đường tròn nên nó cũng là một góc vuông [MĐ. 3.31]. Nhưng BAD cũng bằng C. Vì vậy góc trong cung tròn AEB cùng bằng C.

Như vậy, cung tròn AEB nhận góc AEB bằng với góc C

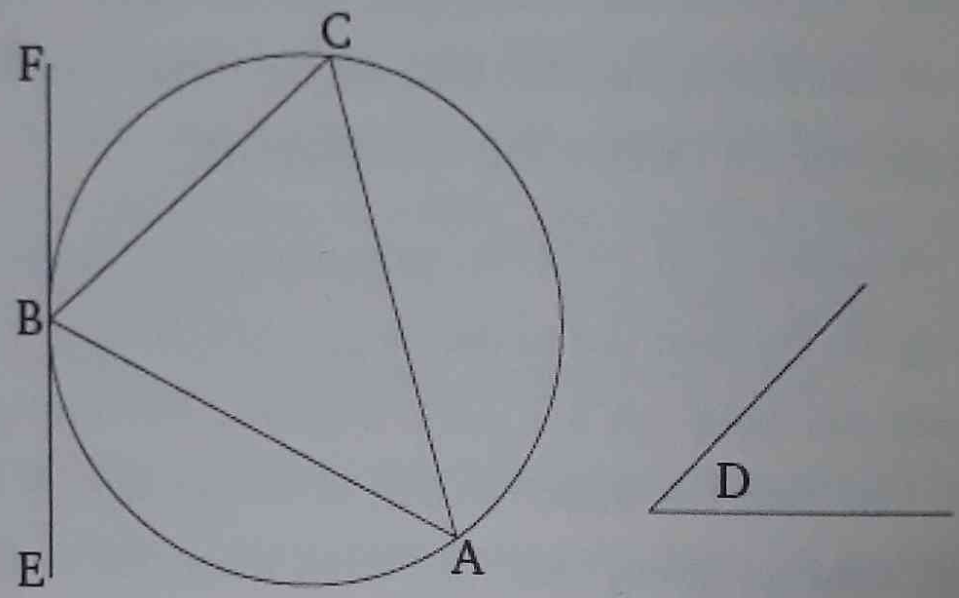
cho trước đã được dựng trên đoạn AB cho trước.

Xét C là một góc tù. Từ điểm A, dựng góc BAD bằng với C trên đoạn AB [MĐ. 1.23], như trong hình thứ ba (từ trái sang). Vẽ đoạn AE vuông góc với AD [MĐ. 1.11]. Và tương tự như trước, chia đôi đoạn AB ở F [MĐ. 1.10]. Vẽ FG vuông góc với AB [MĐ. 1.10]. Nối đoạn GB.

Bởi AF bằng FB, có FG là cạnh chung, nên các đoạn AF, FG bằng BF, FG theo thứ tự đó. Và góc AFG bằng góc BFG. Vậy cạnh AG bằng cạh BG [MĐ. 1.4]. Như thế đường tròn tâm G, bán kính GA được vẽ cũng sẽ đi qua điểm B (cũng như A). Cho nó giống như AEB (trên hình thứ ba từ trái sang). Và bởi vì AD vuông góc với đường kính AE tại điểm mút của nó nên AD là tiếp xúc với đường tròn AEB [HQ. MĐ. 3.16]. AB được vẽ từ tiếp điểm A, cắt hình tròn. Vậy góc BAD bằng góc được dựng trong cung tròn so le AHB của đường tròn [MĐ. 3.32]. Nhưng góc BAD bằng góc C. Do đó góc trong cung tròn AHB bằng với góc C.

Như vậy, cung tròn AHB nhận một góc bằng với góc C cho trước đã được dựng trên đoạn AB. Đó chính là yêu cầu cần hoàn thành.

Mệnh đề 34: Từ một đường tròn cho trước, hãy chia một cung [để] nhận một góc bằng một góc thẳng cho trước từ một đường tròn cho trước.



Gọi ABC là đường tròn cho trước, và D là góc thẳng cho trước. Yêu cầu là chia một cung, nhận một góc bằng góc thẳng D cho trước từ đường tròn ABC cho trước.

Vẽ tiếp tuyến EF của đường tròn ABC tiếp xúc tại điểm B.[21] Từ điểm B trên đoạn thẳng FB, dựng góc FBC bằng với góc D [MĐ. 1.23].

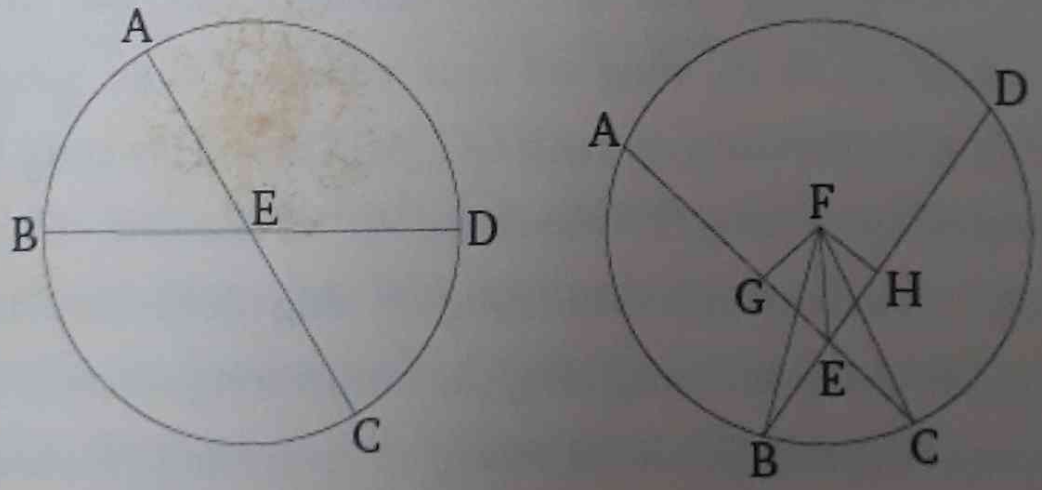
Khi đó, do đoạn EF đã biết tiếp xúc đường tròn ABC và BC được vẽ từ tiếp điểm B, cắt đường tròn, nên góc FBC

21 Giả như là làm được, bằng cách tìm tâm của hình tròn ABC [MĐ. 3.1], vẽ một đường thẳng nối tâm với điểm B, rồi vẽ đường EF đi qua điểm B và vuông góc với đường vừa dựng [MĐ. 1.11].

bằng với góc được dựng trong viên phân BAC [MĐ. 1.32]. Trong thì, FBC bằng với D. Cho nên góc trong viên phân BAC cũng bằng góc D.

Như vậy, cung BAC, nhận một góc bằng với góc thẳng D cho trước, đã được chia ra từ đường tròn cho trước ABC. Đó là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 35:</u> Trong một hình tròn, nếu hai đoạn thẳng cắt nhau [thành tổng cộng bốn đoạn], thì hình chữ nhật được tạo thành bởi hai đoạn của đoạn này cũng bằng với hình chữ nhật được tạo thành bởi hai đoạn của đoạn kia.



Xét hai đoạn thẳng AC và BD, trong hình tròn ABCD, cắt nhau tại điểm E. Có thể phát biểu rằng hình chữ nhật tạo thành bởi AE và EC thì bằng với hình chữ nhật tạo thành bởi DE và EB.

Nếu AC và BD đi qua tâm đường tròn (như là hình vẽ đầu tiên từ bên trái) thì E là tâm đường tròn ABCD, thì rõ ràng rằng AE, EC, DE và EB là bằng nhau, hình chữ nhật có cạnh AE và EB bằng với hình chữ nhật có cạnh là DE và EB.

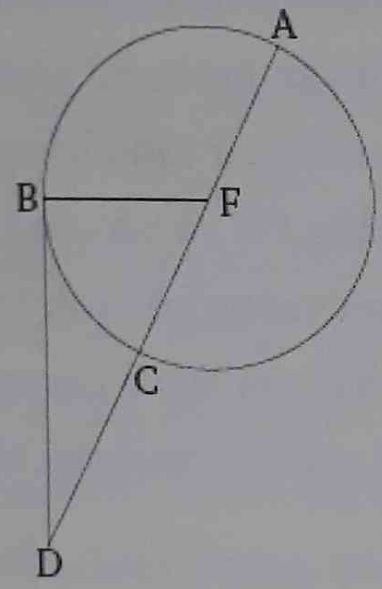
Khi AB và DB không đi qua tâm (như là hình thứ hai từ trái sang), và tâm của đường tròn ABCD đã được xác định [MĐ. 3.1], tại điểm F. Vẽ FG và FH từ điểm F, lần lượt vuông góc với AC và DB [MĐ. 1.12]. Nối các đoạn FB, FC và FE.

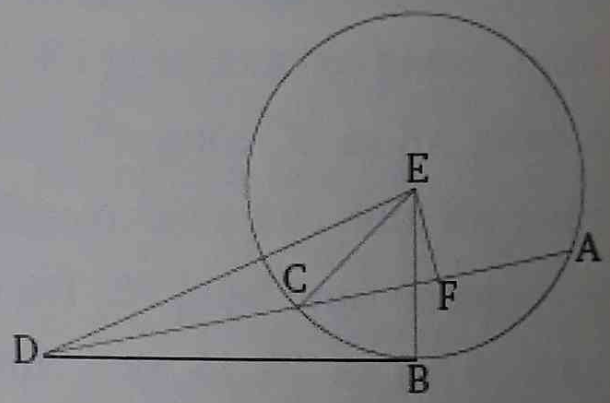
Bởi một đoạn thẳng GF qua tâm, cắt vuông góc với một đoạn thẳng khác, AC, không qua tâm nên nó sẽ chia đôi đoạn thẳng kia [MĐ. 3.3]. Vì vậy AG bằng GC. Như thế, do đoạn AC bị chia thành hai đoạn bằng nhau tại G, và hai đoạn không bằng nhau tại E cho nên hình chữ nhật tạo bởi các cạnh AE và EC cộng với hình vuông có cạnh bằng EG thì bằng hình vuông có cạnh GC [MĐ. 2.5]. Hãy cộng hình vuông có cạnh bằng GF vào cả hai vế. Từ đó, hình chữ nhật có cách cạnh bằng AE và EC cộng với tổng các hình vuông có cạnh GE và GF thì bằng tổng các hình vuông có cạnh bằng CG và GF. Trong thì, hình vuông có cạnh bằng FE thì bằng với tổng của các hình vuông có cạnh bằng EG và GF [MĐ. 1.47], và hình vuông có cạnh bằng FC thì bằng với tổng các hình vuông có cạnh bằng CG và GF [MĐ. 1.47]. Vậy, hình chữ nhật có các cạnh bằng AE và EC cộng với hình vuông

có cạnh bằng FE thì bằng với hình vuông có cạnh bằng FC. Mà FC thì bằng FB. Cho nên, hình chữ nhật có các cạnh bằng AE và EC cộng với hình vuông có cạnh bằng FE thì bằng với hình vuông có cạnh bằng FB. Cũng với lý do đó, hình chữ nhật có cạnh bằng DE và EB cộng với hình vuông có cạnh bằng FE thì bằng với hình vuông có cạnh bằng FB. Và hình chữ nhật có các cạnh bằng AE và EC cộng với hình vuông có cạnh bằng FE cũng đã được chứng minh là bằng với hình vuông có cạnh bằng FB. Như vậy, hình chữ nhật có cạnh bằng AE cà EC cộng với hình vuông có cạnh bằng FE thì bằng với hình chữ nhật có cạnh bằng DE và EB cộng với hình vuông có cạnh bằng FE. Trừ hình vuông có cạnh bằng FE khỏi cả hai vế. Từ đó, hình chữ nhật còn lại có các cạnh bằng AE và EC thì bằng với hình chữ nhật có các cạnh bằng DE và EB.

Vậy, trong một hình tròn, nếu hai đường thẳng cắt nhau [thành tổng cộng bốn đoạn], thì hình chữ nhật được tạo thành bởi hai đoạn của đường này cũng bằng với hình chữ nhật được tạo thành bởi hai đoạn của đường kia. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 36: **Nếu từ một điểm nào đó bên ngoài đường tròn, dựng hai đoạn thẳng về phía đường tròn, một cắt đường tròn và đoạn còn lại tiếp xúc với nó, thì hình chữ nhật tạo bởi các cạnh là toàn bộ đoạn thẳng cắt đường tròn và phần nằm ngoài đường tròn của đường thẳng đó, tính từ điểm đang xét đến điểm cắt, thì bằng với hình vuông có cạnh là đoạn thẳng tiếp tuyến.**





Lấy điểm D nằm ngoài đường tròn ABC, và vẽ hai đoạn thẳng, DC[A] và DB, xuất phát từ điểm D về phía đường tròn ABC. DCA cắt đường tròn ABC và BD tiếp xúc với đường tròn. Có thể phát biểu rằng hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DC bằng với hình vuông có cạnh bằng DB.

[D]CA chắc chắn hoặc đi qua tâm hoặc không. Đầu tiên hãy xét trường hợp đi qua tâm, và F là tâm của đường

tròn, nối đoạn FB. Như vậy FBD là góc vuông [MĐ. 3.18]. Và đoạn AC bị chia đôi tại F, hãy thêm đoạn CD vào. Hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DC cộng với hình vuông có cạnh bằng FC thì bằng với hình vuông có cạnh bằng FD [MĐ. 2.6]. FC bằng với FB. Như vậy, hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DC cộng với hình vuông có cạnh bằng FB bằng với hình vuông có cạnh bằng FD. Và hình vuông có cạnh bằng FD bằng với tổng của các hình vuông có cạnh bằng FB và BD [MĐ. 1.47]. Vậy, hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DC cộng với hình vuông có cạnh bằng FB bằng với tổng các hình vuông có cạnh bằng FB và BD. Hãy trừ hình vông có cạnh bằng FB khỏi cả hai vế. Khi đó hình chữ nhật còn lại có cạnh bằng AD và DC bằng với hình vuông có cạnh bằng tiếp tuyến DB.

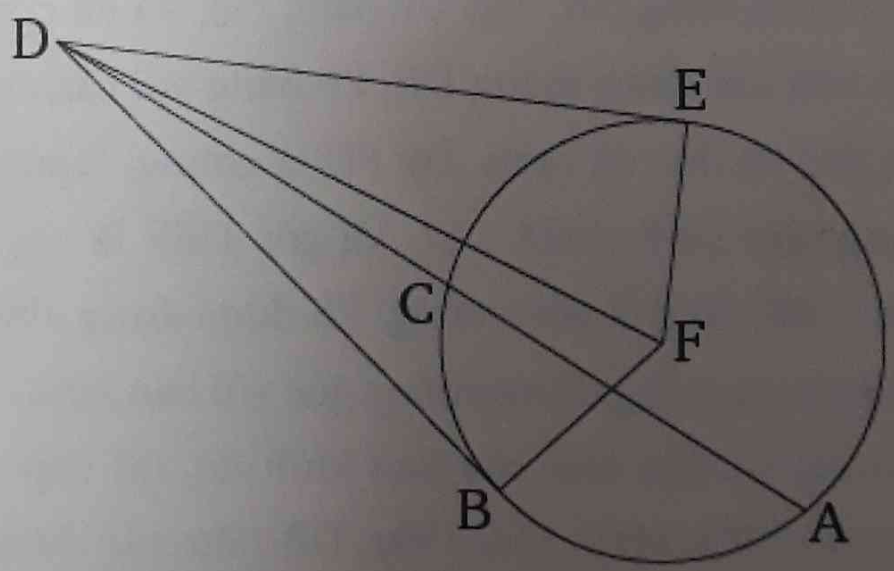
Bây giờ xét DCA không đi qua tâm đường tròn ABC, và E được xác định là tâm của đường tròn, vẽ đoạn EF từ E, vuông góc với AC [MĐ. 1.12]. Nối các đoạn EB, EC và ED. Vậy góc EBD là góc vuông [MĐ. 3.18]. Và một đoạn thẳng, EF, đi qua tâm, cắt một đoạn thẳng khác, AC không đi qua tâm, tạo một góc vuông thì sẽ chia đoạn thẳng đó làm đôi [MĐ. 3.3]. Vậy AF bằng FC. Đoạn AC bị chia đôi ở F, hãy thêm CD vào. Khi đó, hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DC cộng với hình vuông có cạnh bằng FC bằng với hình

vuông có cạnh bằng FD [MĐ. 2.6]. Cộng hình vuông có cạnh bằng FE vào cả hai vế. Khi đó, hình chữ nhật có cạnh bằng AD và DC cộng với tổng của các hình vuông có cạnh bằng CF và FE bằng tổng của các hình vuông có cạnh bằng FD và FE. Nhưng hình vuông có cạnh bằng EC bằng với tổng các hình vuông có cạnh bằng CF và FE. Có góc EFC là góc vuông [MĐ. 1.47]. Và hình vuông có cạnh bằng ED bằng với tổng của các hình vuông có cạnh bằng DF và FE [MĐ. 1.47]. Như vậy, hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DC cộng với hình vuông có cạnh bằng EC bằng với hình vuông có cạnh bằng ED. EC bằng EB. Vậy, hình chữ nhật có cạnh bằng AD và DC cộng với hình vuông có cạnh bằng EB bằng với hình vuông có cạnh bằng ED. Tổng của các hình vuông có cạnh bằng EB và BD bằng với hình vuông có cạnh bằng ED. Có EBD là góc vuông [MĐ. 1.47]. Vì thế, hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DC cộng với hình vuông có cạnh bằng EB bằng với tổng các hình vuông có cạnh bằng EB và BD. Trừ hình vuông có cạnh bằng EB ở cả hai vế. Khi đó, hình chữ nhật còn lại có cạnh bằng AD và DC bằng với hình vuông có cạnh bằng BD.

Như vậy, nếu từ một điểm nào đó bên ngoài đường tròn, vẽ hai đường thẳng về phía đường tròn, một đường tròn và đường còn lại tiếp xúc với nó, thì hình chữ nhật tạo bởi các cạnh là toàn bộ đoạn thẳng cắt đường tròn và phần

nằm ngoài đường tròn của đường thẳng đó, tính từ điểm đang xét đến điểm cắt, thì bằng với hình vuông có cạnh là đoạn tiếp tuyến. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 37:</u> **Nếu từ một điểm nào đó bên ngoài đường tròn, dựng hai đoạn thẳng về phía đường tròn, một cắt đường tròn và đoạn còn lại giao với đường tròn, và [khi] hình chữ nhật tạo bởi các cạnh là toàn bộ đoạn thẳng cắt đường tròn và phần nằm ngoài đường tròn của đường thẳng đó, tính từ điểm đang xét đến điểm cắt, mà bằng với hình vuông có cạnh là đoạn thẳng giao với đường tròn, thì đoạn thẳng giao với đường tròn là tiếp xúc với đường tròn đó.**



Lấy điểm D nằm ngoài đường tròn ABC, và vẽ hai đoạn thẳng, DCA và DB, xuất phát từ điểm D về phía đường tròn ABC, DCA cắt đường tròn và BD giao với đường tròn. Và cho hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DC bằng với hình vuông có cạnh bằng DB. Có thể phát biểu rằng DB tiếp xúc với đường tròn ABC.

Vẽ đoạn DE tiếp xúc với ABC [MĐ. 3.17], và xác định tâm của đường tròn ABC, là F. Nối các đoạn FE, FB và FD. Góc FED vì thế là một góc vuông [MĐ. 3.18]. Vì DE tiếp xúc đường tròng ABC và DCA cắt đường tròn đó nên hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DC bằng với hình vuông có cạnh bằng DE [MĐ. 3.36]. Và hình chữ nhật có các cạnh bằng AD và DC cũng bằng với hình vuông có cạnh bằng BD. Như thế, hình vuông có cạnh bằng DE bằng với hình vuông có cạnh bằng DB. Vậy, DE bằng DB. Và FE cũng bằng FB. Cho nên các đoạn thẳng DE, EF bằng với các đoạn DB, BF theo thứ tự đó. Và cạnh đáy FD là chung. Như vậy góc DEF bằng góc DBF [MĐ. 1.8]. Và góc DEF là góc vuông. Cho nên DBF cũng là góc vuông. FB được dựng như là bán kính. Một đoạn thẳng dựng vuông góc với bán kính của một đường tròn, tại đầu mút của bán kính đó, thì tiếp xúc với đường tròn [HQ. MĐ. 3.16]. Vậy, DB tiếp xúc đường tròn ABC. Tương tự như vậy, kết quả được chứng minh ngay cả

khi tâm đường tròn nằm trên AC.

Như vậy từ một điểm nào đó bên ngoài đường tròn, dựng hai đoạn thẳng về phía đường tròn, một cắt đường tròn và đoạn còn lại giao với đường tròn, và hình chữ nhật tạo bởi các cạnh là toàn bộ đoạn thẳng cắt đường tròn và phần nằm ngoài đường tròn của thẳng đó, tính từ điểm đang xét đến điểm cắt, mà bằng với hình vuông có cạnh là đoạn thẳng giao với với đường tròn, thì đoạn thẳng giao với đường tròn là tiếp xúc với đường tròn đó. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Quyển 4

Phép dựng các hình thẳng ở trong và xung quanh hình tròn

Định nghĩa

1. Một hình thẳng được gọi là nội tiếp trong một hình thẳng (khác) khi từng đỉnh của các góc của hình được dựng nội tiếp đó lần lượt chạm (tiếp xúc) vào từng cạnh của hình mà trong hình đó nó được nội tiếp.

2. Tương tự, một hình thẳng được gọi là ngoại tiếp một hình thẳng khác khi từng cạnh của hình được dựng ngoại tiếp đó lần lượt chạm (tiếp xúc) vào từng đỉnh của các góc của hình mà nó bao lấy.

3. Một hình thẳng được gọi là nội tiếp một hình tròn khi từng đỉnh của hình được dựng nội tiếp đó chạm (tiếp xúc) vào đường chu vi của hình tròn.

4. Một hình thẳng được gọi là ngoại tiếp một hình tròn khi từng cạnh của hình được dựng ngoại tiếp đó chạm (tiếp xúc) vào đường chu vi của hình tròn.

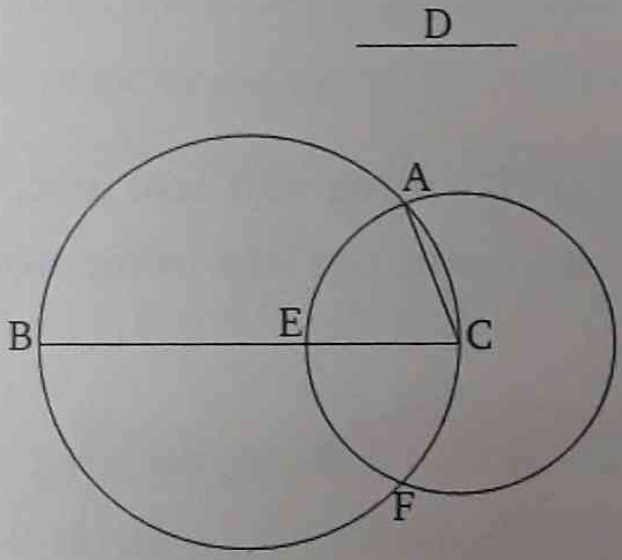
5. Tương tự, một hình tròn được gọi là nội tiếp một hình (thẳng) khi đường chu vi của hình tròn chạm (tiếp xúc) vào từng cạnh của hình bao lấy nó.

6. Một hình tròn được gọi là ngoại tiếp một hình (thẳng) khi đường chu vi của hình tròn chạm (tiếp xúc) vào

từng đỉnh của hình mà nó bao lấy.

7. Một đoạn thẳng được gọi là được chèn vào một hình tròn khi hai đầu mút của nó nằm trên đường chu vi của hình tròn.

<u>Mệnh đề 1:</u> Hãy chèn vào hình tròn một đoạn thẳng có độ dài không lớn hơn đường kính của đường tròn.



Gọi ABC là hình tròn cho trước, và D là đoạn thẳng biết trước không lớn hơn đường kính của hình tròn. Yêu cầu chèn một đoạn thẳng, bằng với đoạn D, vào hình tròn ABC.

Vẽ đường kính BC của hình tròn ABC[01]. Do nếu BC bằng với D, thì yêu cầu vừa được đặt ra đã được thực hiện. Bởi đoạn thẳng BC, bằng với đoạn thẳng D, đã được chèn

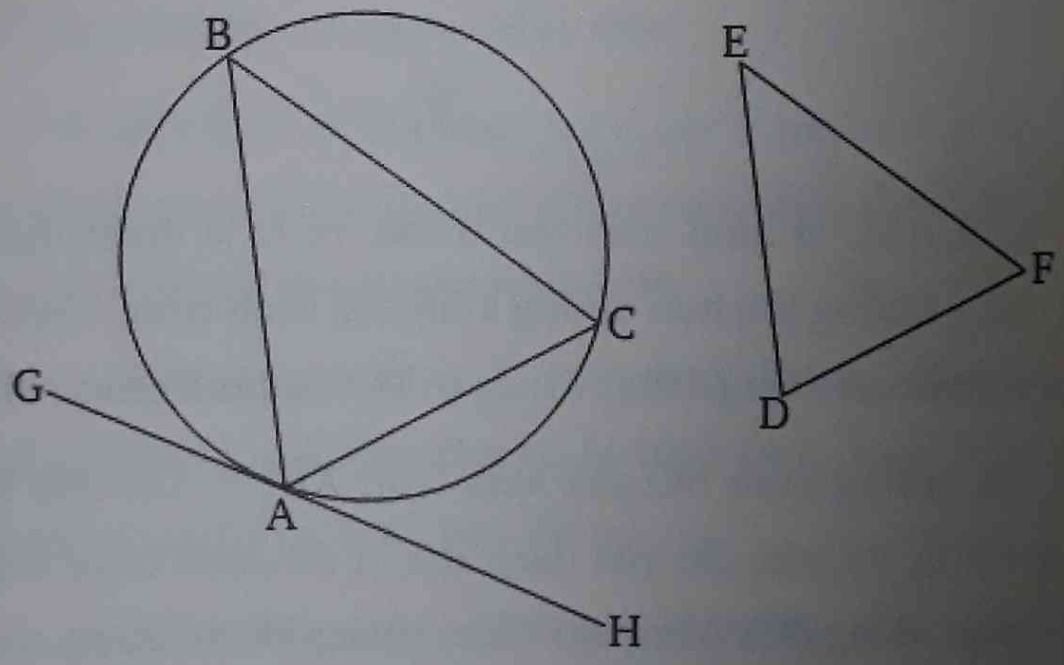
01 Có thể làm được, bằng cách xác định tâm của hình tròn [theo MĐ 3.1], rồi vẽ một đường thẳng cái tâm đó.

vào hình tròn ABC. Trường hợp BC lớn hơn D, thì đặt đoạn CE bằng với D [MĐ 1.3], và vẽ hình tròn EAF với tâm C và bán kính CE. Rồi nối đoạn CA.

Do điểm C là tâm của hình tròn EAF, cho nên, CA bằng với CE. Nhưng, CE bằng với D. Suy ra, D cũng bằng CA.

Vậy, CA, bằng với đoạn thẳng D có đội dài biết trước, đã được chèn vào hình tròn ABC. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

<u>Mệnh đề 2:</u> Hãy dựng một tam giác, đẳng giác[02] với một tam giác cho trước, nội tiếp trong một hình tròn cho trước.



02 Đẳng giác là các góc bằng nhau: hai tam giác đồng dạng trường hợp góc-góc. (ND)

Gọi ABC là hình tròn cho trước và DEF là tam giác cho trước. Yêu cầu dựng một tam giác, đẳng giác với tam giác DEF, nội tiếp trong hình tròn ABC.

Vẽ GH chạm vào hình tròn ABC tại A[03]. Và dựng góc HAC, bằng với góc DEF, tại điểm A hướng về phía AH[04], và dựng góc GAB, bằng với góc DFE, tại điểm A hướng về phía AG [MĐ 1.23]. Rồi nối đoạn BC.

Vì đường thẳng AH bất kỳ chạm vào hình tròn ABC, và đường thẳng AC được vẽ cắt ngang hình tròn từ tiếp điểm[05] A, nên suy ra góc HAC bằng với góc ABC nằm trong hình viên phân so le của hình tròn [MĐ 3.32]. Nhưng HAC thì bằng với DEF. Suy ra, góc ABC cũng bằng với DEF. Vậy nên, với cùng lý do như vậy, ACB cũng bằng với DFE. Suy ra, góc BAC còn lại thì bằng với góc EDF còn lại [MĐ 1.32]. [Suy ra, tam giác ABC thì đẳng giác với tam giác DEF, và đã được dựng nội tiếp hình tròn ABC].

Vậy, đã dựng được một tam giác, đẳng giác với một tam giác cho trước, nội tiếp một hình tròn cho trước. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

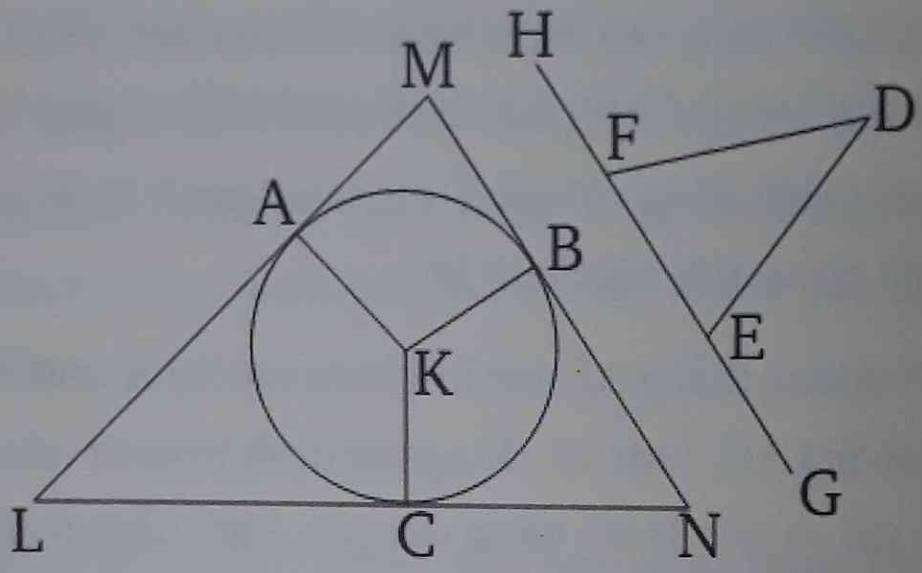
---

03 Xem ghi chú cho Mệnh đề 3.34.

04 Một đường thẳng mà có một đầu mút cố định, và đầu còn lại được kéo dài tới vô hạn ở Việt Nam thường được gọi là tia. Tuy nhiên, khái niệm tia không được Euclid mô tả trong tác phẩm của ông. (ND)

05 Tiếp điểm hay điểm tiếp xúc là nơi hai đường – ở đây là đường tròn ABC và đường thẳng AC, chạm vào mà không cắt nhau. (ND)

<u>Mệnh đề 3:</u> Hãy dựng một tam giác, đẳng giác[06] với một tam giác cho trước, ngoại tiếp một đường tròn cho trước.



Gọi ABC là hình tròn cho trước và DEF là tam giác cho trước. Yêu cầu dựng một tam giác, đẳng giác với tam giác DEF, ngoại tiếp hình tròn ABC.

Kéo dài đường EF về hai phía đến các điểm G và H. Và tìm được tâm K của hình tròn ABC [MĐ 3.1]. Vẽ đoạn KB cắt (ABC), một cách tùy ý. Dựng góc BKA, bằng với góc DEG, tại điểm K hướng về phía KB, và góc BKC, bằng với DFH [MĐ 1.23]. Rồi vẽ các đường thẳng LAM, MBN và NCL lần lượt đi qua các điểm A, B, và C, và tiếp xúc với hình tròn ABC[07].

---

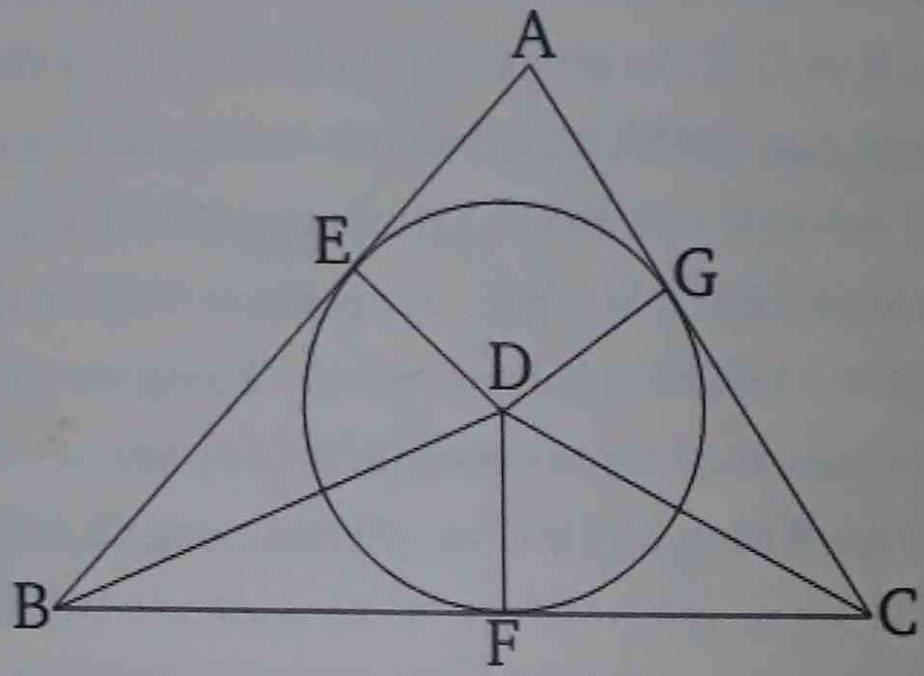
06 Xem chú thích của người dịch cho MĐ 2.2 (ND)

07 Xem ghi chú cho MĐ 3.34.

Vì LM, MN, và NL lần lượt tiếp xúc với đường tròn ABC tại các điểm A, B và C, mà KA, KB và KC là các đoạn lần lượt nối tâm K với các điểm A, B và C, suy ra các góc tại đỉnh A, B và C là các góc vuông [MĐ 3.18]. Và vì tổng bốn góc của tứ giác AMBK bằng bốn góc vuông, cho nên AMBK cũng có thể được chia thành hai tam giác [MĐ 1.32], mà các góc KAM và KBM đều là góc vuông, suy ra tổng các góc còn lại, AKB và AMB, bằng hai góc vuông. Và tổng các góc DEG và DEF cũng bằng hai góc vuông [MĐ 1.13]. Suy ra, tổng của AKB và AMB bằng với DEG và DEF, mà trong đó AKB bằng với DEG. Suy ra, góc AMB còn lại bằng với góc DEF còn lại. Tương tự như vậy, có thể chứng minh rằng LNB cũng bằng với DFE. Suy ra, (góc) MLN còn lại cũng bằng với góc EDF còn lại [MĐ 1.32]. Suy ra, tam giác LMN là đẳng giác với tam giác DEF. Và nó đã được dựng bao quanh hình tròn ABC.

Vậy, đã dựng được một tam giác, đẳng giác với một tam giác cho trước, ngoại tiếp một hình tròn cho trước. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

<u>Mệnh đề 4:</u> Hãy dựng một hình tròn nội tiếp một tam giác cho trước.



Gọi ABC là tam giác cho trước.Yêu cầu dựng một hình tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lần lượt chia đôi hai góc ABC và ACB bằng hai đường thẳng BD và CD [MĐ1.9], cho chúng gặp nhau tại điểm D, và vẽ các đường DE, DF và DG từ điểm D, lần lượt vuông góc với các đoạn thẳng AB, BC và CA [MĐ 1.12].

Bởi vì góc ABD bằng với góc CBD, và góc vuông BED cũng bằng với góc vuông BFD, suy ra EBD và FBD là hai tam giác có hai góc này bằng hai góc kia, và cạnh này bằng cạnh kia – cạnh đối diện cặp góc bằng nhau lại là cạnh chung của

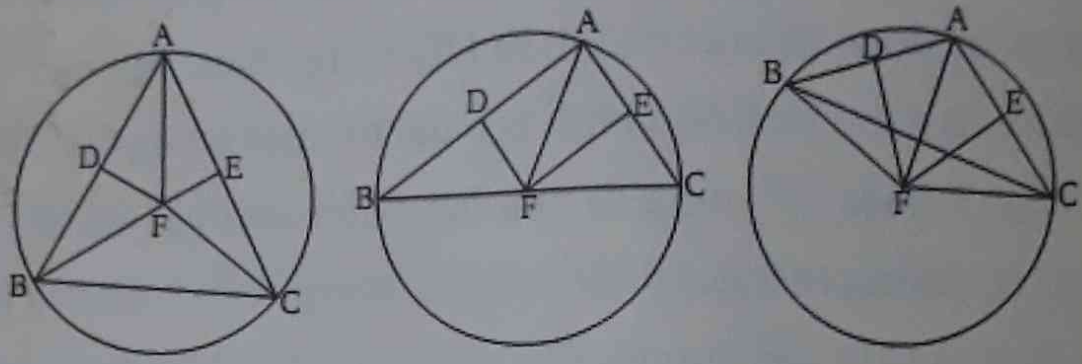
cả hai tam giác – tức là cạnh BD. Suy ra, chúng sẽ có các cạnh tương ứng còn lại bằng nhau [MĐ 1.26]. Suy ra, DE bằng với DF. Nên, cũng với cùng lý do, DG thì cũng bằng với DF. Suy ra, ba đoạn thẳng DE, DF và DG bằng nhau. Suy ra, hình tròn vẽ từ tâm D với bán kính kéo dài tới một trong các điểm E hoặc F hoặc G[08] cũng đi qua hai điểm còn lại, và sẽ tiếp xúc các đường thẳng AB, BC và CA, trong điều kiện các góc tại E, F và G là góc vuông. Bởi nếu như nó cắt một trong số chúng thì đó sẽ là một đường thẳng được vẽ vuông góc với một đường kính của hình tròn, tại đầu mút của nó, nhưng lại nằm bên trong hình tròn. Điều này đã được chứng minh là phi lý [MĐ 3.16]. Suy ra, vẽ hình tròn tâm D, và có bán kính nối tới một trong các điểm E hoặc F hoặc G, không cắt đường thẳng AB, BC và CA. Như vậy, nó sẽ tiếp xúc với chúng. Và hình tròn này đã được dựng nội tiếp tam giác ABC.

Vậy, đã dựng được hình tròn EFG nội tiếp tam giác ABC cho trước. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

---

08 Ở đây, và cả trong các mệnh đề tiếp theo sau, điều này được hiểu rằng bán kính là một trong số các đoạn DE hoặc DF hoặc DG.

<u>Mệnh đề 5:</u> Hãy dựng một hình tròn ngoại tiếp một tam giác cho trước.



Gọi ABC là tam giác cho trước. Yêu cầu dựng một hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC cho trước.

Lần lượt chia đôi các đoạn thẳng AB và AC tại các điểm D và E [MĐ 1.10]. Và vẽ các đường DF và EF lần lượt từ các điểm D và E, vuông góc với AB và AC [MĐ 1.11]. Nên DF và EF, khi kéo dài, chắc chắn sẽ gặp nhau hoặc là ở bên trong tam giác ABC, hoặc là nằm trên đường thẳng BC, hoặc là vượt quá BC.

Trước tiên, xét trường hợp gặp nhau bên trong tam giác ABC tại (điểm) F, rồi nối các điểm FB, FC và FA. Vì AD bằng DB, và DF là cạnh chung và cũng vuông góc với chúng, suy ra cạnh đáy AF thì bằng với cạnh đáy FB [MĐ 1.4]. Tương tự, có thể chứng minh rằng CF cũng bằng AF. Thế nên FB cũng bằng với FC. Suy ra, ba đoạn thẳng FA, FB và FC bằng

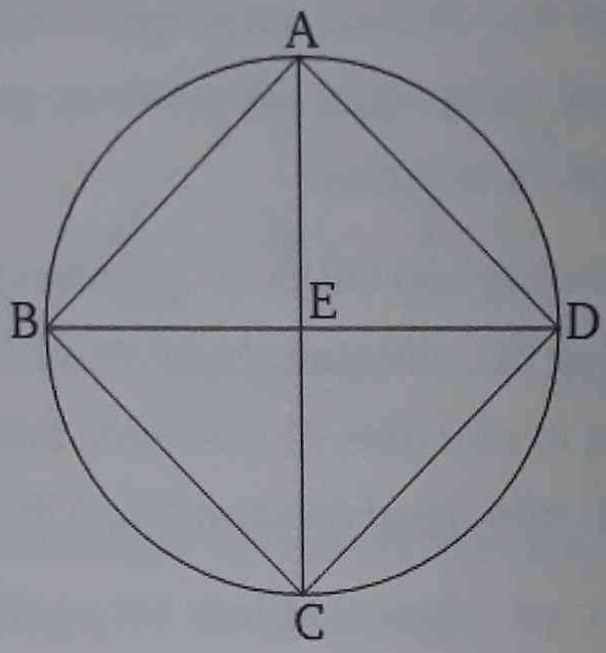
nhau. Suy ra, hình tròn tâm F với bán kính kéo dài tới một trong các điểm A hoặc B hoặc C cũng đi qua hai điểm còn lại. Và hình tròn này đã được dựng ngoại tiếp tam giác ABC. Đã thấy nó được dựng ngoại tiếp như vậy, giống ABC (xem hình vẽ đầu tiên, từ trái qua).

Xét tiếp trường hợp DF và EF gặp nhau tại điểm F nằm trên đường thẳng BC, như trong hình vẽ thứ hai (từ trái qua). Nối A F. Tương tự như trên, có thể chứng minh rằng điểm F là tâm của hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Tiếp theo, xét tiếp trường hợp DF và EF gặp nhau bên ngoài tam giác ABC, tại điểm F, như hình vẽ thứ ba (từ trái qua). Nối AF, BF và CF. Một lần nữa, bởi vì AD thì bằng với DB, và DF là cạnh chung và cũng vuông góc với chúng, suy ra cạnh đáy AF thì bằng với cạnh đáy BF [MĐ 1.4]. Nên, tương tự, ta có thể chứng minh rằng CF thì cũng bằng với AF. Thế nên BF thì cũng bằng với FC. Suy ra, hình tròn tâm F với bán kính là một trong các đoạn FA hoặc FB hoặc FC cũng sẽ đi qua hai điểm còn lại. Và hình tròn này đã được dựng ngoại tiếp tam giác ABC.

Như vậy, đã dựng được một hình tròn ngoại tiếp một tam giác cho trước. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

<u>Mệnh đề 6:</u> Hãy dựng một hình vuông nội tiếp một hình tròn cho trước.



Gọi ABCD là hình tròn cho trước. Yêu cầu dựng một hình vuông nội tiếp hình tròn ABCD.

Dựng hai đường kính của hình tròn ABCD, là AC và BD, sao cho vuông góc với nhau[09]. Rồi nối A B, B C, C D và D A.

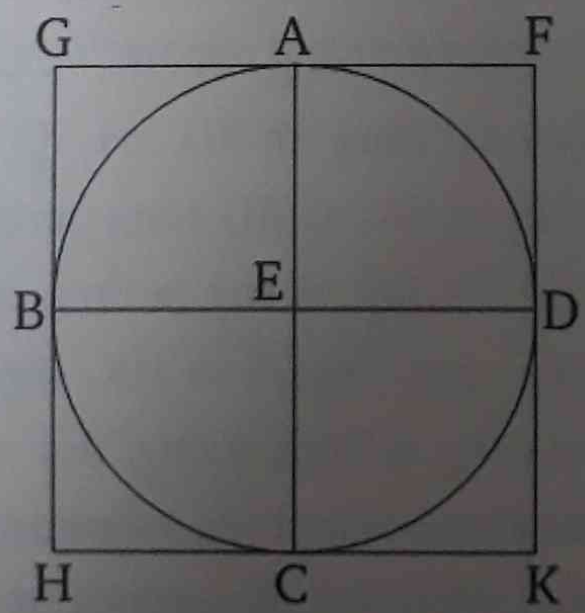
Và vì BE thì bằng với ED, bởi E là tâm của hình tròn, và EA là cạnh chung và cũng vuông góc với chúng, suy ra cạnh đáy AB thì bằng với cạnh đáy AD [MĐ 1.4]. Nên, vì cùng lý do, từng cạnh của BC và CD thì bằng với từng cạnh của AB

09 Cho là được, bằng cách xác định tâm của hình tròn [theo MĐ 3.1], vẽ đường thẳng qua nó, rồi vẽ đường thứ hai qua nó, vuông góc với đường đầu tiên [MĐ 1.11].

và AD. Suy ra, ABCD là tứ giác đều. Vậy nên có thể phát biểu rằng nó là hình vuông. Bởi vì đường thẳng BD là đường kính của hình tròn ABCD, nên BAD là một hình bán nguyệt. Suy ra, góc BAD là một góc vuông [MĐ 3.31]. Từ đó, với cùng lý do như vậy, các góc ABC, BCD và CDA cũng vuông. Suy ra, ABCD là tứ giác vuông. Mà nó vừa được chứng minh là tứ giác đều. Suy ra, nó là hình vuông [theo ĐN. 1.22]. Và hình vuông này đã được đựng nội tiếp trong hình tròn ABCD.

Vậy, đã dựng được hình vuông nội tiếp một hình tròn cho trước. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

<u>Mệnh đề 7:</u> Hãy dựng một hình vuông ngoại tiếp một hình tròn cho trước.



Gọi ABCD là hình tròn cho trước. Yêu cầu dựng một hình vuông ngoại tiếp hình tròn ABCD.

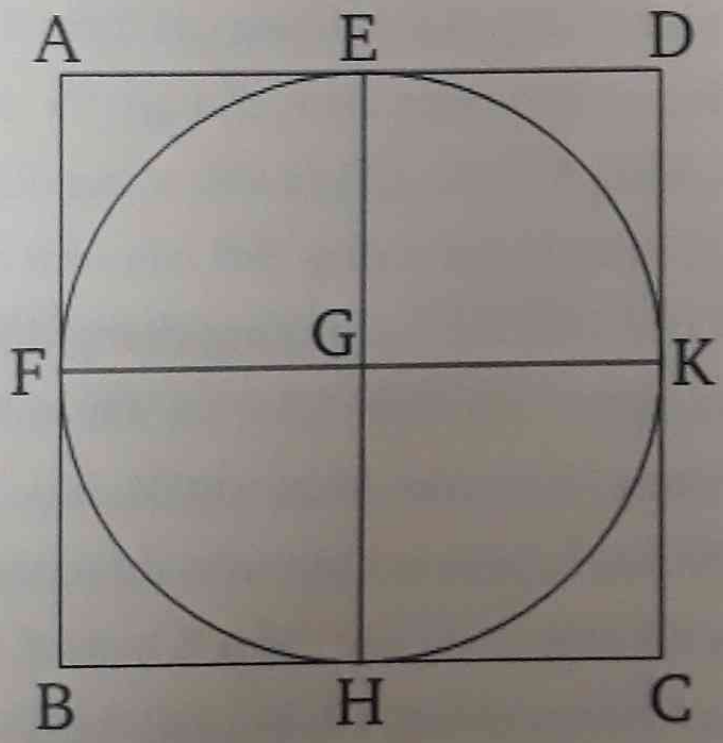
Vẽ hai đường kính của hình tròn ABCD, là AC và BD, sao cho vuông góc với nhau. Và vẽ các đường thẳng FG, GH, HK và KF sao cho lần lượt đi qua các điểm A, B, C, và D, rồi tiếp xúc với hình tròn ABCD.

Vì FG tiếp xúc với hình tròn ABCD, và đoạn EA nối tâm E với tiếp điểm A, nên suy ra góc tại A là một góc vuông [MĐ 3.18]. Với cùng lý do như vậy, các góc tại các điểm B, C và D cũng là góc vuông. Và bởi vì góc AEB là một góc vuông, mà EBG cũng là góc vuông, suy ra GH song song với AC [MĐ1.29]. Cũng với lý do như vậy, AC cũng song song với FK. Vậy nên, GH cũng song song với FK [MĐ 1.30]. Tương tự, có thể chứng minh rằng GF và HK song song với BED. Suy ra, GK, GC, AK, FB và BK đều là các đường chéo hình bình hành. Suy ra, GF thì bằng với HK, và GH bằng với FK [MĐ 1.34]. Và bởi AC bằng với BD, mà AC cũng bằng với từng cạnh của GH và FK, và BD cũng bằng với từng cạnh của GF và HK [MĐ 1.34], và suy ra từng cạnh của GH và FK bằng với từng cạnh của GF và HK, suy ra FGHK là tứ giác đều. Vậy nó cũng là hình vuông. Bởi vì GBEA là một hình bình hành, và AEB là một góc vuông, suy ra AGB cũng là một góc vuông [MĐ 1.34]. Nên, tương tự như vậy, có thể

chứng minh rằng các góc tại H, K và F cũng là góc vuông. Suy ra, FGHK là tứ giác vuông. Và nó cũng vừa được chứng minh là tứ giác đều. Suy ra, nó là hình vuông [ĐN 1.22]. Và hình vuông này đã được dựng ngoại tiếp hình tròn ABCD.

Vậy, đã dựng được một hình vuông ngoại tiếp một hình tròn cho trước. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

<u>Mệnh đề 8:</u> Hãy dựng một hình tròn nội tiếp một hình vuông cho trước.

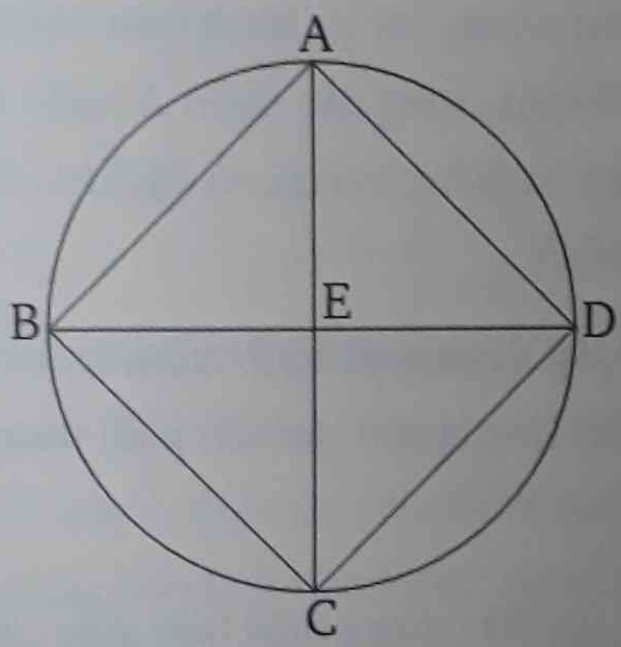


Gọi hình vuông cho trước là ABCD. Yêu cầu dựng một hình tròn nội tiếp hình vuông ABCD.

Lần lượt chia đôi AD và AB tại các điểm E và F [MĐ 1.10]. Vẽ EH đi qua E, song song với AB lẫn CD, và vẽ FK đi qua F, song song với AD lẫn BC [MĐ 1.31]. Suy ra, AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG và GD đều là các đường chéo hình bình hành và các cạnh đối diện của chúng hiển nhiên bằng nhau [MĐ 1.34]. Bởi vì AD bằng với AB, và AE bằng nửa AD, và AF bằng nửa AB, suy ra AE cũng bằng AF. Vậy nên các cạnh đối diện cũng bằng nhau. Suy ra, FG cũng bằng với GE. Tương tự, có thể chứng minh từng cạnh của GH và GK thì bằng với từng cạnh của FG và GE. Suy ra, bốn đoạn (thẳng) GE, GF, GH và GK bằng nhau. Suy ra, hình tròn tâm G với bán kính kéo dài tới một trong các điểm E hoặc F hoặc H hoặc K cũng sẽ đi qua ba điểm còn lại. Và nó sẽ tiếp xúc với các đoạn thẳng AB, BC, CD và DA, trong điều kiện là các góc tại E, F, H và K là góc vuông. Bởi nếu như hình tròn cắt AB, BC, CD hay DA, thì một đường thẳng được vẽ vuông góc với đường kính của hình tròn, tại đầu mút của nó, sẽ rơi vào bên trong hình tròn. Điều này đã được chứng minh là phi lý [MĐ 3.16]. Suy ra, hình tròn được tâm G với bán kính kéo dài tới một trong các điểm E hoặc F hoặc H hoặc K không cắt các đoạn thẳng AB, BC, CD hay DA. Suy ra, nó sẽ tiếp xúc với chúng, và đã được dựng nội tiếp hình vuông ABCD.

Vậy, đã dựng được một hình tròn nội tiếp một hình vuông cho trước. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

<u>Mệnh đề 9:</u> Hãy dựng một hình tròn ngoại tiếp một hình vuông cho trước.



Gọi ABCD là hình vuông cho trước. Yêu cầu dựng một hình tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

Nối A C và nối B D, và cho chúng cắt nhau tại E. Vì DA bằng với AB, và AC là chung, suy ra hai đoạn thẳng DA, AC bằng với hai đoạn thẳng BA, AC. Và cạnh đáy DC thì bằng với cạnh đáy BC. Suy ra, góc DAC bằng với góc BAC [MĐ 1.8]. Suy ra, góc DAB đã được đoạn AC chia làm đôi. Nên, tương tự, có thể chỉ ra rằng từng góc ABC, BCD và CDA đã

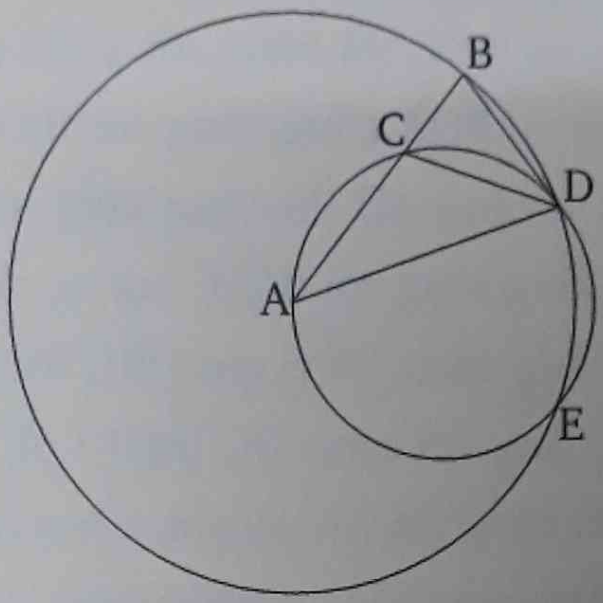
được một trong hai đoạn thẳng AC hoặc DB chia đôi. Vì góc DAB bằng với ABC, và EAB là phân nửa của DAB, và EBA là phân nửa của ABC, suy ra EAB cũng bằng với EBA. Vậy nên cạnh EA thì cũng bằng với EB [MĐ 1.6]. Nên, tương tự, có thể chứng minh rằng từng đoạn của EA và EB cũng bằng với từng đoạn của EC và ED. Suy ra, bốn đoạn thẳng EA, EB, EC và ED là bằng nhau. Suy ra, hình tròn vẽ từ tâm E với bán kính kéo dài tới một trong các điểm A hoặc B hoặc C hoặc D, cũng sẽ đi qua ba điểm còn lại, và đã được dựng ngoại tiếp hình vuông ABCD.

Vậy, đã dựng được một hình tròn ngoại tiếp một hình vuông cho trước. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

<u>Mệnh đề 10:</u> Hãy dựng một tam giác cân mà mỗi góc trong hai góc đáy gấp đôi góc còn lại.

Dựng đoạn thẳng AB bất kỳ và lấy điểm C trên AB sao cho diện tích của hình chữ nhật tạo thành bởi AB và BC thì bằng với diện tích của hình vuông dựng trên cạnh CA [MĐ 2.11]. Và gọi BDE là hình tròn tâm A, bán kính AB. Và chèn đoạn thẳng BD, bằng với đoạn thẳng AC, vốn không dài hơn đường kính của hình tròn BDE, vào hình tròn BDE [MĐ 4.1]. Nối A với D, D với C. Rồi dựng hình tròn ACD ngoại

tiếp tam giác ACD [MĐ 4.5].

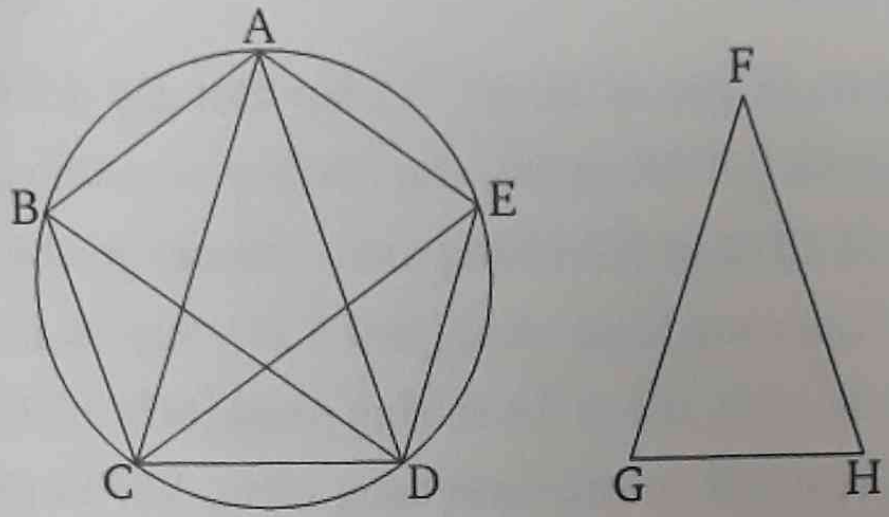


Vì diện tích (hình chữ nhật) tạo thành bởi AB và BC thì bằng với diện tích hình vuông dựng trên cạnh AC, còn AC lại bằng với BD, suy ra diện tích hình chữ nhật tạo thành bởi AB và BC thì bằng với diện tích hình vuông dựng trên cạnh BD. Và bởi vì điểm B được lấy tùy ý ở ngoài hình tròn ACD, hai đoạn thẳng BA và BD được vẽ từ B đến hình tròn ACD mà một đường cắt hình tròn, đường kia gặp (hình tròn), và diện tích hình chữ nhật được tạo thành bởi AB và BC thì bằng với diện tích hình vuông được dựng trên cạnh BD, suy ra BD tiếp xúc với hình tròn ACD [MĐ 3.37]. Bởi vì BD tiếp xúc với hình tròn và DC được vẽ cắt ngang (hình tròn) từ tiếp điểm D, nên suy ra góc BDC bằng với góc DAC nằm trong hình viên phân so le của hình tròn [MĐ 3.32]. Vì BDC

bằng với DAC, cộng thêm CDA vào cả hai bên. Suy ra, toàn bộ góc BDA bằng với tổng của hai góc CDA và DAC. Nhưng, tổng của CDA và DAC thì bằng với phần góc ngoài BCD [MĐ 1.32]. Suy ra, BDA cũng bằng với BCD. Nhưng BDA bằng với CBD, vì cạnh AD thì cũng bằng với AB [MĐ 1.5]. Vậy nên DBA cũng bằng với BCD. Suy ra, cả ba (góc) BDA, DBA và BCD bằng nhau. Và vì góc DBC bằng với BCD, nên cạnh BD cũng bằng với cạnh DC [MĐ 1.6]. Nhưng, BD đã được giả định là bằng với CA. Suy ra, CA cũng bằng với CD. Vậy nên góc CDA cũng bằng với góc DAC [MĐ 1.5]. Suy ra, CDA và DAC thì gấp đôi DAC. Nhưng BCD bằng với từng góc CDA và DAC. Suy ra, BCD thì cũng gấp đôi CAD. Và BCD lần lượt bằng với góc BDA và DBA. Suy ra, BDA và DBA thì, từng góc một, gấp đôi DAB.

Vậy, đã dựng được tam giác cân ABD sao cho mỗi góc ở đáy BD gấp đôi góc còn lại. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

<u>Mệnh đề 11:</u> Hãy dựng một ngũ giác có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau[10] nội tiếp một hình tròn cho trước.



Gọi ABCDE là hình tròn cho trước.Yêu cầu dựng một ngũ giác đều nội tiếp hình tròn ABCDE.

Dựng tam giác cân FGH sao cho mỗi góc tại G và H gấp đôi góc tại F [MĐ 4.10]. Dựng tam giác ACD, đẳng giác với FGH, nội tiếp hình tròn ABCDE, vậy nên CAD thì bằng với góc tại F, và từng góc tại G và H tương ứng bằng với từng

---

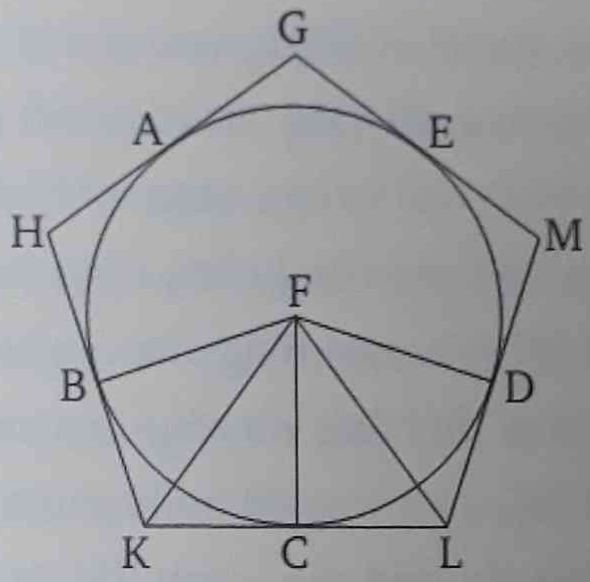
10 Nguyên văn bản tiếng Anh: equilateral and equiangular, nghĩa là, có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau. Người dịch chọn việc dịch sát theo nguyên văn nhằm bảo toàn tính mục đích/ý đồ của văn bản. Từ chỗ này cho đến hết phần mệnh đề này, sẽ cụm từ trên đây sẽ được dịch là 'đều', vốn thân thuộc hơn với đa số người đọc, và cũng để làm gọn mạch văn. Tuy nhiên cũng cần nói thêm cho rõ, một đa giác có các cạnh bằng nhau không hiển nhiên sẽ có các góc bằng nhau. Nói cách khác, đa giác có các cạnh bằng nhau có thể suy ra các góc bằng nhau, và ngược lại, khi và chỉ khi đang được xem xét trong hình học phẳng-Euclid. (ND)

góc ACD và CDA [MĐ 4.2]. Suy ra, các góc ACD và CDA lần lượt gấp đôi CAD. Lần lượt chia đôi góc ACD và góc CDA bằng các đường thẳng CE và DB [MĐ 1.9]. Rồi nối A B, B C, C D D E và E A.

Bởi vì các góc ACD và CDA lần lượt gấp đôi CAD, và được chia đôi bởi CE và DB, cho nên suy ra, năm góc DAC, ACE, ECD, CDB và BDA bằng nhau. Mà các góc bằng nhau này chắn các cung bằng nhau [MĐ 3.26]. Suy ra, năm cung tròn AB, BC, CD, DE và EA là bằng nhau [MĐ 3.29]. Suy ra, ngũ giác ABCDE có các cạnh bằng nhau. Vậy ta phát biểu rằng nó cũng có các góc bằng nhau. Bởi cung tròn AB thì bằng với cung tròn DE, thêm BCD vào cả hai bên. Suy ra, toàn bộ cung tròn ABCD thì bằng với toàn bộ cung tròn EDCB. Và góc AED chắn cung tròn ABCD, và góc BAE chắn cung tròn EDCB. Suy ra, góc BAE cũng bằng với AED [MĐ 3.27]. Nên, cùng với lý do như vậy, từng góc ABC, BCD và CDE thì cũng bằng với từng góc BAE và AED. Suy ra, ngũ giác ABCDE có các góc bằng nhau. Mà nó vừa được chứng minh là có các cạnh bằng nhau.

Vậy, đã dựng được một ngũ giác đều nội tiếp một hình tròn cho trước. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

<u>Mệnh đề 12:</u> Hãy dựng một ngũ giác đều có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau[11] ngoại tiếp một hình tròn cho trước.



Gọi ABCDE là hình tròn cho trước. Yêu cầu là dựng một ngũ giác đều ngoại tiếp hình tròn ABCDE.

Gọi A, B, C, D và E là các điểm được hiểu như là các đỉnh của một ngũ giác được dựng nội tiếp trong hình tròn ABCDE [MĐ 3.11], như vậy thì các cung tròn AB, BC, CD, DE và EA là bằng nhau. Và lần lượt vẽ các đường GH, HK, KL, LM và MG ngang qua các điểm A, B, C, D và E, đến chạm vào hình tròn[12]. Và tìm được tâm F của hình tròn ABCDE đã được tìm thấy [MĐ 3.1]. Nối F B, F K, F C, F L và F D.

---

11 Xem chú thích của người dịch ở MĐ 4.11. (ND)

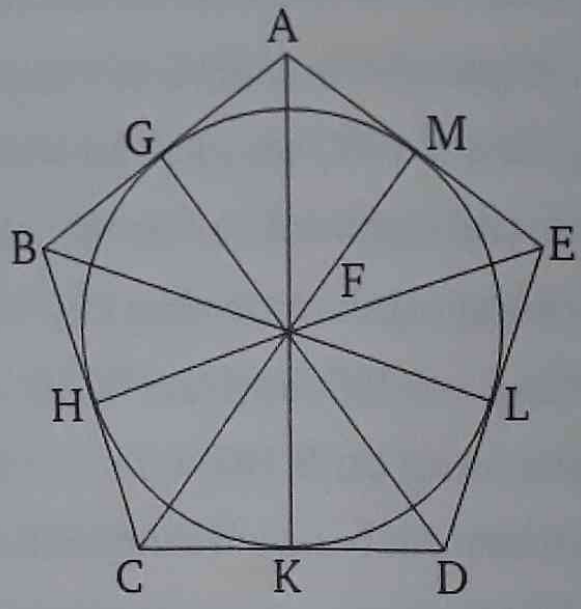
12 Xem chú thích cho MĐ 3.34.

Vì đường thẳng KL tiếp xúc với hình tròn ABCDE tại C, và FC là đường nối từ tâm F tới tiếp điểm C, suy ra FC vuông góc với KL [MĐ 3.18]. Suy ra, các góc tại điểm C là vuông. Nên, cùng với lý do như vậy, các góc tại B và D cũng vuông. Và bởi vì góc FCK là góc vuông, suy ra bình phương của cạnh FK thì bằng với tổng của các bình phương của các cạnh FC và CK [MĐ 1.47]. Nên, cùng với lý do như vậy, bình phương của cạnh FK thì cũng bằng tổng bình phương của các cạnh FB và BK. Vậy nên tổng của các bình phương của các cạnh FC và CK thì bằng với tổng của các bình phương các cạnh FB và BK, mà trong đó bình phương của cạnh FC thì bằng với bình phương của cạnh FB. Suy ra, phần bình phương còn lại của cạnh CK thì bằng với phần bình phương còn lại của cạnh BK. Suy ra BK bằng với CK. Và vì FB bằng với FC, và FK là cạnh chung, nên hai đường thẳng BF, FK thì bằng với hai đường thẳng CF, FK. Và cạnh đáy BK bằng với cạnh đáy CK. Suy ra, góc BFK thì bằng với KFC [MĐ 1.8]. Mà BKF bằng với FKC [MĐ 1.8]. Suy ra, BFC gấp đôi so với KFC, và BKC gấp đôi so với FKC. Nên, cùng lý do như vậy, CFD thì cũng gấp đôi so với CFL, và DLC cũng gấp đôi so với FLC. Và bởi vì cung tròn BC thì bằng với CD, góc BFC cũng bằng với CFD [MĐ 3.27]. Và BFC gấp đôi so với KFC, và DFC gấp đôi so với LFC. Suy ra, KFC cũng bằng với LFC.

Và góc FCK cũng bằng với FCL. Nên, FKC và FLC là hai tam giác có hai góc này bằng hai góc kia và một cạnh này bằng một cạnh kia, còn chung của chúng là FC. Suy ra, chúng cũng sẽ có các cạnh và các góc còn lại này tương ứng bằng với các cạnh và các góc còn lại [MĐ 1.26]. Suy ra, đoạn thẳng KC bằng với CL, và góc FKC với FLC. Và bởi vì KC thì bằng với LC, suy ra KL (thì) gấp đôi so với KC. Nên, cùng lý do như vậy, có thể chứng minh được rằng HK cũng gấp đôi so với BK. Và BK bằng với KC. Suy ra, HK thì cũng bằng với KL. Nên, tương tự, từng cạnh HG, GM và ML cũng có thể được chứng minh lần lượt bằng với từng cạnh HK và KL. Suy ra, ngũ giác GHKLM có các cạnh bằng nhau. Vậy ta cũng có thể phát biểu rằng nó cũng có các góc bằng nhau. Bởi góc FKC thì bằng với FLC, mà HKL vừa được chỉ ra (là) gấp đôi so với FKC, và KLM gấp đôi so với FLC, suy ra HKL cũng bằng với KLM. Nên, tương tự, từng góc KHG, HGM và GML cũng có thể chứng tỏ được lần lượt bằng với từng góc HKL và KLM. Suy ra, năm góc GHK, HKL, KLM, LMG và MGH bằng nhau. Suy ra, ngũ giác GHKLM có các góc bằng nhau. Mà nó vừa được chứng minh có các cạnh bằng nhau, cũng như đã được dựng ngoại tiếp hình tròn ABCDE.

Vậy, đã dựng được một ngũ giác đều ngoại tiếp một hình tròn cho trước. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

<u>Mệnh đề 13:</u> Hãy dựng một hình tròn nội tiếp một ngũ giác cho trước có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.[13]



Gọi ABCDE là ngũ giác đều cho trước. Yêu cầu dựng một hình tròn nội tiếp ngũ giác ABCDE.

Lần lượt chia đôi các góc BCD và CDE bởi từng đường thẳng CF và DF [MĐ 1.9]. Và cho các đường thẳng FB, FA và FE cũng gặp nhau tại F, nơi hai đường thẳng CF và DF gặp nhau. Và vì BC bằng với CD, và CF là cạnh chung, hai đoạn thẳng BC, CF bằng với hai đoạn thẳng DC, CF. Và góc BCF thì bằng với góc DCF. Suy ra, cạnh đáy BF bằng với cạnh đáy DF, tam giác BCF thì bằng với tam giác DCF, và các góc còn lại đối diện với các cạnh tương ứng bằng nhau cũng sẽ bằng

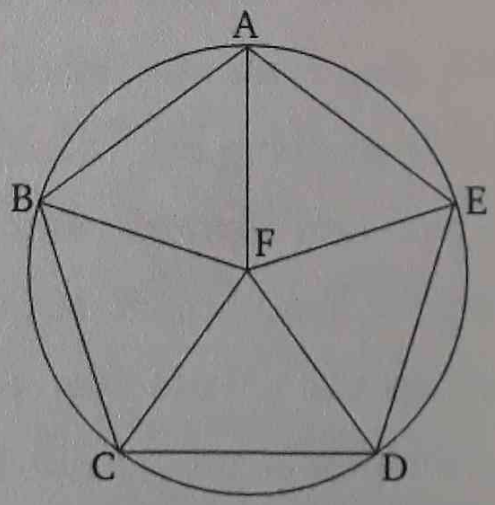
13 Xem chú thích của người dịch ở MĐ 4.11. (ND)

nhau [MĐ 1.4]. Suy ra, góc CBF thì bằng với CDF. Và bởi CDE gấp đôi CDF, và CDE bằng với ABC, và CDF với CBF, suy ra CBA cũng gấp đôi so với CBF. Suy ra, góc ABF bằng với FBC. Suy ra góc ABC đã được chia đôi bởi đường thẳng BF. Tương tự như vậy, có thể chứng minh rằng BAE và AED lần lượt bị chia đôi bởi một trong hai đường thẳng FA và FE. Rồi từ điểm F vẽ FG, FH, FK, FL và FM lần lượt tới vuông góc với một trong các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE và EA [MĐ 1.12]. Và bởi góc HCF thì bằng với KCF, và góc vuông FHC thì cũng bằng với góc vuông FKC, còn FHC và FKC là hai tam giác có hai góc này bằng hai góc kia và một cạnh này bằng một cạnh kia, có cạnh chung của chúng là FC, đối diện với hai góc tương ứng bằng nhau. Suy ra, chúng cũng sẽ có các cạnh còn lại này tương ứng bằng với các cạnh còn lại kia [MĐ 1.26]. Suy ra, đường vuông góc FH bằng với đường vuông góc FK. Nên, tương tự như vậy, có thể chứng minh rằng FL, FM và FG, từng cạnh một, bằng với từng cạnh FH và FK. Suy ra, năm đoạn thẳng FG, FH, FK, FL và FM bằng nhau. Suy ra, hình tròn tâm F với bán kính tới một trong các điểm G hoặc H hoặc K hoặc L hoặc M cũng sẽ đi qua bốn điểm còn lại, và sẽ tiếp xúc với các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE và EA, trong điều kiện là góc tại các điểm G, H, K, L và M đã là góc vuông. Bởi giả sử nó không chạm vào mà là cắt

ngang chúng, điều đó kéo theo rằng một đường thẳng được vẽ vuông góc với đường kính của hình tròn, tại đầu mút của nó, sẽ rơi vào bên trong hình tròn. Điều này vốn được chứng minh là phi lý [MĐ 3.16]. Suy ra, hình tròn tâm F, với bán kính tới một trong các điểm G hoặc H hoặc K hoặc M, không cắt các đường thẳng AB, BC, CD, DE hay EA. Suy ra, nó sẽ tiếp xúc với chúng.

Vậy, đã dựng được một hình tròn nội tiếp một ngũ giác đều cho trước. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

<u>Mệnh đề 14:</u> Hãy dựng một hình tròn ngoại tiếp một ngũ giác cho trước có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.[14]



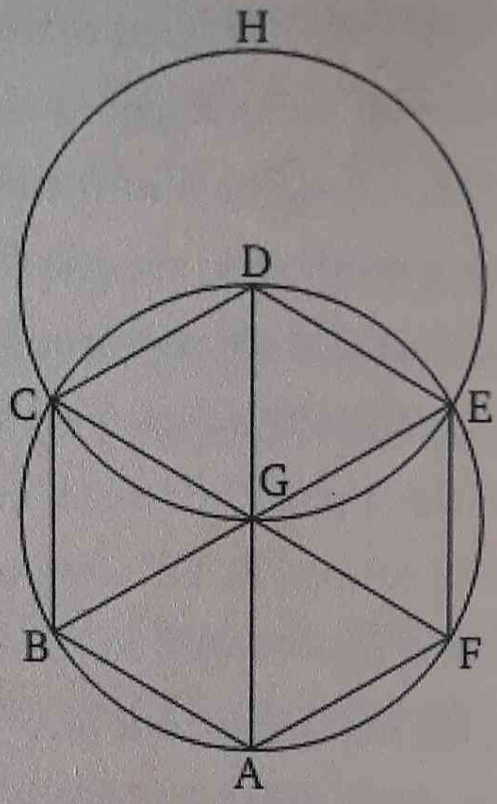
14 Xem chú thích của người dịch ở MĐ 4.11. (ND)

Gọi ABCDE là ngũ giác đều cho trước. Yêu cầu dựng một hình tròn ngoại tiếp ngũ giác ABCDE.

Lần lượt chia đôi các góc BCD và CDE bởi từng đường thẳng CF và DF [MĐ 1.9]. Nối đoạn thẳng FB, FA và FE từ điểm F, nơi các đoạn vừa nói đến gặp nhau, lần lượt đến các điểm B, A và E. Nên, tương tự như mệnh đề trước (mệnh đề này), có thể chứng minh rằng các góc CBA, BAE và AED cũng lần lượt được chia đôi bởi một trong các đường thẳng FB, FA và FE. Và bởi góc BCD bằng với CDE, và FCD là phân nửa của BCD, và CDF là phân nửa của CDE, suy ra FCD thì cũng bằng với FDC. Nên cạnh FC cũng bằng với cạnh FD [MĐ 1.6]. Nên, tương tự như vậy, có thể chứng minh rằng FB, FA và FE cũng lần lượt từng cạnh bằng với từng cạnh FC và FD. Suy ra, năm đoạn thẳng FA, FB, FC, FD và FE bằng nhau. Suy ra, hình tròn tâm F, với bán kính bằng một trong các đoạn FA hoặc FB hoặc FC hoặc FD hoặc FE, cũng sẽ đi qua bốn điểm còn lại, và đã được dựng sao cho ngoại tiếp ngũ giác nói trên.

Vậy, đã dựng được một hình tròn ngoại tiếp ngũ giác đều cho trước. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

Mệnh đề 15: Hãy dựng một lục giác có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau[15] nội tiếp một hình tròn cho trước.



Gọi ABCDEF là hình tròn cho trước. Yêu cầu dựng một lục giác đều nội tiếp hình tròn ABCDEF.

Vẽ đường kính AD của hình tròn ABCDEF[16], và xác định tâm G của hình tròn [MĐ 3.1]. Vẽ hình tròn EGCH tâm D, bán kính DG. Nối E G, C G, sao cho lần lượt cắt hình tròn tại các điểm B và F. Rồi nối A B, B C, C D, D E, E F và F A. Có thể phát biểu rằng lục giác ABCDEF là đều.

---

15 Xem chú thích của người dịch ở MĐ 4.11. (ND)

16 Xem ghi chú cho MĐ 4.6.

Bởi điểm G là tâm của hình tròn ABCDEF, GE bằng với GD. Thêm nữa, bởi D là tâm của hình tròn GCH, DE thì bằng với DG. Suy ra, GE cũng bằng với ED. Suy ra, tam giác EGD có ba cạnh bằng nhau. Suy ra, ba góc của nó – EGD, GDE và DEG, cũng bằng nhau, cũng như hai góc tại cạnh đáy của các tam giác cân thì bằng nhau [MĐ 1.5]. Và tổng ba góc của tam giác thì bằng hai góc vuông [MĐ 1.32]. Suy ra, góc EGD là một phần ba của hai góc vuông. Nên, tương tự như vậy, DGC cũng có thể được chứng minh bằng phần ba của hai góc vuông. Và bởi đoạn CG, gác lên EB, tạo các góc kề EGC và CGB bằng với hai góc vuông [MĐ 1.13], suy ra góc CGB còn lại cũng bằng phần ba của hai góc vuông. Suy ra, các góc EGD, DGC và CGB bằng nhau. Và theo đó các góc đối của chúng – BGA, AGF và FGE, thì cũng lần lượt bằng nhau và bằng với các góc EGD, DGC, CGB [MĐ 1.15]. Suy ra, sáu góc EGD, DGC, CGB, BGA, AGF và FGE bằng nhau. Mà các góc bằng nhau chắn các cung bằng nhau [MĐ 3.26]. Suy ra, sáu cung AB, BC, CD, DE, EF và FA bằng nhau. Mà các dây bằng nhau trương các cung bằng nhau [MĐ 3.29]. Suy ra, sáu đoạn thẳng (AB, BC, CD, DE, EF và FA) bằng nhau. Suy ra, lục giác ABCDEF có các cạnh bằng nhau. Vậy, có thể phát biểu rằng nó cũng có các góc bằng nhau. Bởi lẽ cung tròn FA thì bằng với cung tròn ED, thêm cung ABCD

vào cả hai cung. Suy ra, toàn bộ cung FABCD bằng với toàn bộ cung EDCBA. Suy ra, góc AFE bằng với DEF [MĐ 3.27]. Tương tự, cũng có thể chứng minh từng góc còn lại của lục giác ABCDEF bằng với từng góc AFE và FED. Suy ra, lục giác ABCDEF có các góc bằng nhau. Mà nó vừa được chứng minh là có các cạnh bằng nhau. Và đã được dựng nội tiếp hình tròn ABCDE.

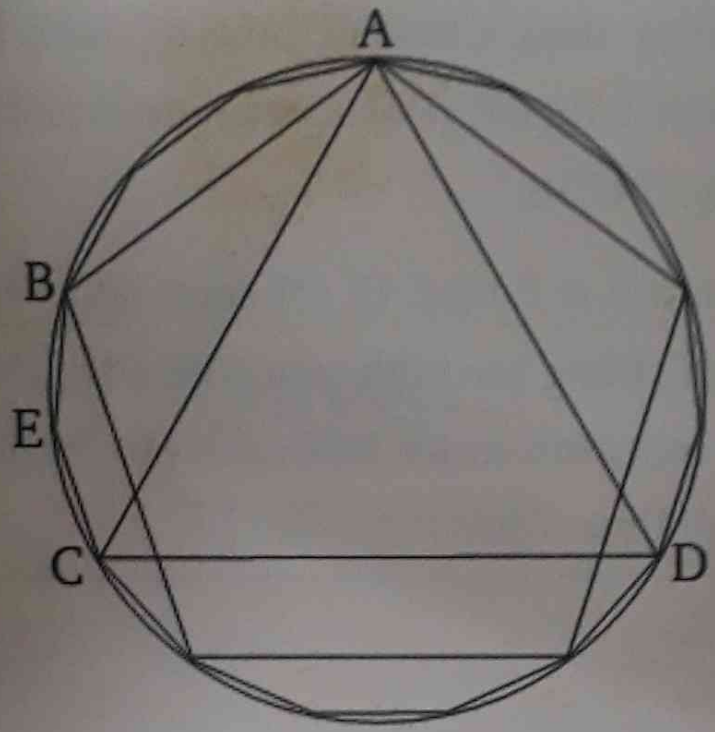
Vậy, đã dựng được một lục giác đều nội tiếp hình tròn cho trước. Đây chính là yêu cầu cần phải thực hiện.

Hệ quả

Vậy, từ đây, hiển nhiên là một cạnh của lục giác đều thì bằng với bán kính của hình tròn mà nó nội tiếp

Và tương tự như với ngũ giác, nếu vẽ các tiếp tuyến của hình tròn trên khắp cả sáu cung bằng nhau của đường chu vi của hình tròn, có thể dựng được một lục giác đều ngoại tiếp hình tròn, theo cách thức tương đồng với phép dựng hình cho ngũ giác vừa đề cập. Và, hơn nữa, nhờ các phép dựng tương tự như đối với ngũ giác vừa đề cập, có thể dựng một hình tròn nội/ngoại tiếp một lục giác cho trước. Đây là yêu cầu cần phải thực hiện.

<u>Mệnh đề 16:</u> Hãy dựng một hình-mười-lăm-cạnh có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau[17] nội tiếp một hình tròn cho trước.



Gọi ABCD là hình tròn cho trước. Yêu cầu dựng một hình-mười-lăm-cạnh-đều nội tiếp hình tròn ABCD.

Dựng một tam giác đều có cạnh AC và nội tiếp hình tròn ABCD [MĐ 4.2], và dựng một ngũ giác đều[18] có cạnh AB nội tiếp hình tròn ABCD[MĐ 4.11]. Giải thích rằng hình tròn ABCD được tạo nên từ mười lăm mảnh ghép bằng nhau thì có thể suy ra, cung ABC vốn bằng một phần ba của

17 Xem chú thích của người dịch ở MĐ 4.11. (ND)

18 Nguyên văn: equilateral triangle/pentagon, nghĩa là, tam/ngũ giác có các cạnh bằng nhau. Trong hình học Euclid, bằng nhau về cạnh tương đương với bằng nhau về góc. (ND)

hình tròn được tạo nên từ năm mảnh ghép như vậy, và cung AB vốn bằng một phần năm của hình tròn được tạo nên từ ba mảnh. Suy ra, phần cung còn lại BC được tạo nên từ hai mảnh ghép bằng nhau. Chia đôi cung BC tại E [MĐ. 3.30]. Suy ra, mỗi một cung BE và EC là bằng một phần mười lăm của hình tròn ABCDE.

Vậy, nếu nối B E và E C, rồi chèn liên tiếp các đoạn thẳng bằng với chúng vào hình tròn ABCD[E] [MĐ 3.1], thì sẽ chèn được một hình-mười-lăm-cạnh vào (hình tròn). Đây là yêu cầu phải thực hiện.

Quyển 5

TỈ LỆ THỨC[01]

01 Lý thuyết về tỉ lệ thức trong sách này nói chung là thành quả của Eudoxus xứ Cnidus. Điểm mới của lý thuyết này là khả năng xử lý các đại lượng vô tỉ, là vấn đề cho đến lúc đó vẫn là cản trở đối với các nhà toán học Hy Lạp. Xuyên suốt các chú thích trong sách này thì α, β, γ v.v là để biểu diễn các đại lượng nói chung, thường là vô tỉ, còn m, n, l v.v là để biểu diễn các số tự nhiên dương.

Định nghĩa

1. Một đại lượng là một phần của một đại lượng (khác), là phần nhỏ hơn của cái lớn hơn, khi nó đo cái lớn hơn.

2. Và đại lượng lớn hơn là bội số của đại lượng nhỏ hơn khi nó được đo theo cái nhỏ hơn.

3. Một tỷ số[02] là một kiểu điều kiện thể hiện mối quan hệ về độ lớn của hai đại lượng cùng loại.

4. Các đại lượng này được gọi là tỷ lệ với nhau nếu có thể vượt qua đại lượng kia khi được nhân lên.

5. Các đại lượng được gọi là có cùng tỷ lệ, giữa đại lượng thứ nhất và thứ hai[03], và giữa đại lượng thứ ba và thứ tư, khi bội số có cùng nhân tử[04] của các đại lượng thứ nhất và thứ ba sẽ đồng thời lớn hơn, hoặc đồng thời bằng, hoặc đồng thời nhỏ hơn các bội số có cùng nhân tử của đại lượng thứ hai và thứ tư theo thứ tự tương ứng đó, bằng bất cứ kiểu

02 Chữ ratio ở đây có khi được gọi là tỷ số, có khi sẽ được gọi là tỷ lệ (danh từ, chỉ kết quả so sánh hai đại lượng qua phép chia) (ND).

03 Trong bản dịch, chọn cách viết tỷ lệ (hay tỷ số) của A và B có nghĩa là trong phép chia so sánh này thì tỷ lệ đó bằng A : B; cũng có khi viết tỷ lệ (hay tỷ số) của A so với B hay tỷ lệ (hay tỷ số) giữa A và B, với cùng ý nghĩa. (ND)

04 Ở đây sử dụng cách gọi "bội số có cùng nhân tử" để dịch cụm từ "equal multiple", có nghĩa là: khi A = N x C và B = N x D thì A và B là các bội số có cũng nhân tử của C và D, với N là nhân tử; cũng có cách gọi A và B là các đồng bội. (ND)

tính nhân nào.

6. Và các đại lượng có cùng tỷ lệ được gọi là các đại lượng tỷ lệ.

7. Và khi thực hiện phép nhân với cùng một nhân tử (như trong ĐN 5), nếu bội số nhận được của đại lượng thứ nhất lớn hơn đại lượng thứ hai, trong khi bội số nhận được của đại lượng thứ ba không lớn hơn đại lượng thứ tư, thì có thể nói rằng tỷ lệ giữa đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai lớn hơn tỷ lệ giữa đại lượng thứ ba và đại lượng thứ tư.

8. Và tỷ lệ giữa ba đại lượng là số lượng ít nhất các đại lượng làm thành tỷ lệ[05].

9. Và khi ba đại lượng tỷ lệ với nhau thì tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ ba bằng bình phương của tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai.

10. Và khi bốn đại lượng tỷ lệ liên tục với nhau thì tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ tư bằng lập phương của tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai. Và tiếp tục như vậy, một cách tương tự, có thể kéo dài tùy ý dãy các đại lượng tỷ lệ.

11. Các đại lượng sau được gọi là (các đại lượng) đồng

---

05 Định nghĩa này nói về trường hợp có ba đại lượng p, q, r tỷ lệ với nhau, thì: p:q = q:r; sử dụng cho Định nghĩa 9 bên dưới. (ND)

dạng khi: tử số tỷ lệ với tử số, và mẫu số tỷ lệ với mẫu số[06].

12. Tỷ số so le là tỷ số của tử số và tử số của hai tỷ số bằng nhau và tỷ số này bằng với tỷ số của hai mẫu số đó.

13. Tỷ số đảo là tỷ số của mẫu số này và tử số kia và cũng là tỷ số của tử số này và với mẫu số kia.

14. Tỷ số phức là tỷ số của tổng tử số và mẫu số so với chính mẫu số đó.

15. Tỷ số riêng là tỷ số của hiệu giữa tử số và mẫu số so với chính mẫu số đó.

16. Tỷ số biến đổi là tỷ số của tử số và hiệu giữa tử số trừ đi chính mẫu số đó[07].

17. Cho một số đại lượng, và một số đại lượng khác có cùng số lượng, có cùng tỷ lệ theo từng cặp, trường hợp tỷ lệ bắc cầu xảy ra khi tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng cuối cùng trong nhóm các đại lượng thứ nhất bằng với tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng cuối cùng trong nhóm

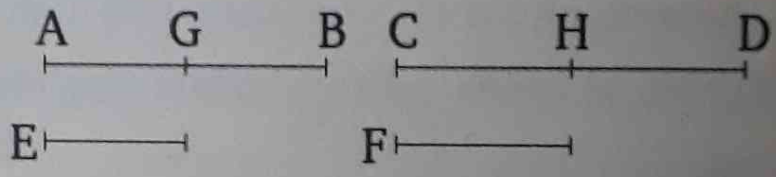
06 Trong các định nghĩa từ 11 đến 16, Euclid coi các đại lượng là các tỷ số, có tử số và mẫu số lần lượt được nói đến trong bản tiếng Anh là leading và following, nhưng ở định nghĩa 18 thì hai chữ này được hiểu là đại lượng đứng trước và đại lượng đứng sau trong một lực lượng gồm 3 đại lượng. Hai cách hiểu này cũng lặp lại ở các Mệnh đề. (ND)

07 Trong sách này, Euclid mặc nhiên coi các tỷ số, hay tỷ lệ, là có tử số lớn hơn mẫu số. Trong sách cũng dùng chữ proportion/hay proportional, thì được dịch là tỷ lệ với giá trị lớn hơn đơn vị (1 = một), chứ không phải là tỷ lệ thuận (là quan hệ ràng buộc tăng cùng tăng của hai đại lượng). (ND)

các đại lượng thứ hai. Hay nói cách khác, là lấy tỷ lệ của các đại lượng nằm ở biên sau khi bỏ đi các đại lượng bên trong.

18. Cho ba đại lượng, và các đại lượng khác có cùng số lượng, trường hợp tỷ lệ chéo cặp xảy ra khi tỷ lệ của đại trước và đại lượng sau trong nhóm các đại lượng thứ nhất bằng tỷ số của đại lượng trước và đại lượng sau trong nhóm các đại lượng thứ hai, và tỷ số của đại lượng sau so với đại lượng còn lại trong nhóm các đại lượng thứ nhất bằng tỷ số của đại lượng sau so với đại lượng còn lại trong nhóm các đại lượng thứ hai.

Mệnh đề 1: Nếu có một số lượng bất kỳ các đại lượng cho trước là bội số của các đại lượng tương ứng khác, có cùng số lượng, thì khi một trong số các đại lượng trong nhóm thứ nhất có thể chia hết cho đại lượng tương ứng trong nhóm thứ hai được bao nhiêu thì tất cả các đại lượng trong nhóm thứ nhất cũng có thể chia hết cho tất cả các đại lượng tương ứng trong nhóm thứ hai được bấy nhiêu.



Giả sử có một số lượng bất kỳ các đại lượng cho trước AB và CD là bội số tương ứng của các đại lượng E và F khác với cùng một nhân tử. Có thể phát biểu rằng nếu AB chia cho E được bao nhiêu, thì AB, CD cũng có thể chia hết cho E, F được bấy nhiêu.

Do AB, CD là bội số của E, F với cùng một nhân tử cho nên trong AB có thể có bao nhiêu đại lượng bằng E thì trong CD cũng sẽ có chừng đó đại lượng bằng F. Có thể chia AB thành các đại lượng AG và GB bằng với E, và chia CD thành các đại lượng CH, HD bằng với F. Như vậy số lượng các phần chia AG, GB bằng với số lượng các phần chia CH. HD. Và do AG bằng E, CH bằng F, nên có AG bằng E và AG.

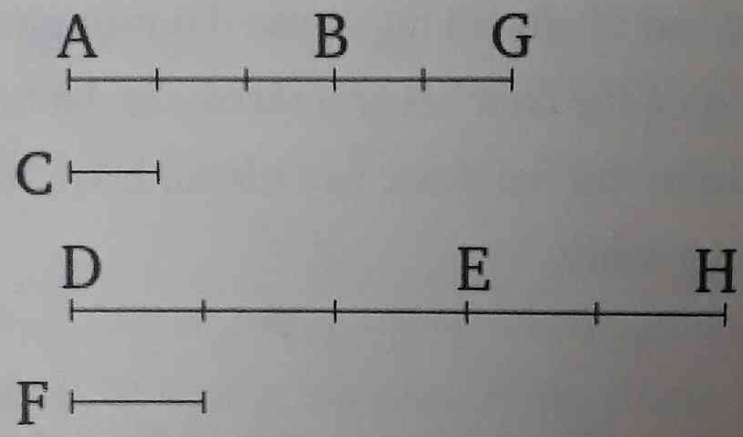
CH bằng E,F. Tương tự, có GB bằng E và GB, HD bằng E, F. Như vậy, nếu AB chia hết cho E được bao nhiêu thì AB và CD cũng hết cho E, F được bấy nhiêu.

Như vậy, nếu có một số lượng bất kỳ các đại lượng cho trước là bội số của các đại lượng tương ứng khác, có cùng số lượng, thì khi một trong số các đại lượng trong nhóm thứ nhất có thể chia hết cho đại lượng tương ứng trong nhóm thứ hai được bao nhiêu thì tất cả các đại lượng trong nhóm thứ nhất cũng có thể chia hết cho tất cả các đại lượng tương ứng trong nhóm thứ hai được bấy nhiêu. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 2: Nếu đại lượng thứ nhất và thứ ba là bội số có cùng nhân tử với các đại lượng thứ hai và thứ tư theo thứ tự đó, và các đại lượng thứ năm và thứ sáu cũng là bội số có cùng nhân tử với các đại lượng tương ứng thứ hai và thứ tư này, thì tổng của các đại lượng thứ nhất và thứ năm, và tổng các đại lượng thứ ba và thứ sáucũng sẽ là bội số có cùng nhân tử của các đại lượng tương ứng thứ hai và thứ tư.

Giả sử đại lượng thứ nhất AB và thứ ba DE là bội số có cùng nhân tử của các đại lượng tương ứng thứ hai C và

thứ tư F. Và giả sử các đại lượng thứ năm BG và thứ sáu EH cũng là bội số có cùng số nhân của các đại lượng tương ứng thứ hai C và thứ tư F. Có thể phát biểu rằng khi cộng các đại lượng thứ nhất và thứ năm với nhau, có được AG, và cộng các đại lượng thứ ba và thứ sáu với nhau, có được DH thì chúng cũng là bội số có cùng số nhân của các đại lượng thứ hai C và thứ tư F tương ứng.

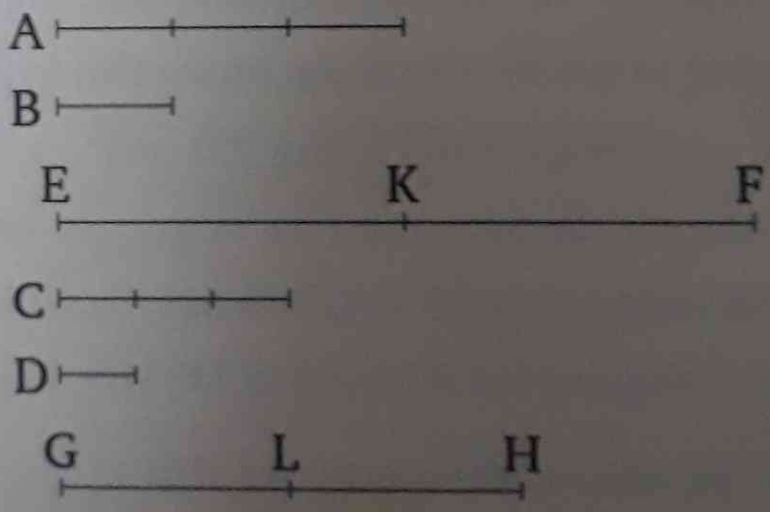


Do AB và DE là bội số có cùng nhân tử của C và F nên nếu AB nhiều hơn C bao nhiêu lần thì DE cũng nhiều hơn F bấy nhiêu lần. Tương tự, nếu BG nhiều hơn C bao nhiêu lần thì EH cũng nhiều hơn F bấy nhiêu lần. Như vậy, nếu đại lượng tổng AG nhiều hơn C bao nhiêu lần thì đại lượng tổng DH cũng sẽ nhiều hơn F bấy nhiêu lần. Nghĩa là khi AG chia hết cho C bao nhiêu lần thì DH cũng chia hết được cho F bấy nhiêu lần. Do vậy, khi cộng các đại lượng thứ nhất và thứ năm với nhau, cộng các đại lượng thứ ba và thứ sáu với nhau, có được các đại lượng AG và DH, sẽ có cùng một bội

số lần so với các đại lượng thứ hai C và thứ tư F.

Như vậy, nếu đại lượng thứ nhất và thứ ba là bội số có cùng nhân tử với các đại lượng tương ứng thứ hai và thứ tư, và các đại lượng thứ năm và thứ sáu cũng là bội số có cùng nhân tử với các đại lượng tương ứng thứ hai và thứ tư này, thì tổng của các đại lượng thứ nhất và thứ năm, và tổng các đại lượng thứ ba và thứ sáu cũng sẽ là bội số có cùng nhân tử của các đại lượng tương ứng thứ hai và thứ tư. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 3:</u> Nếu các đại lượng thứ nhất và thứ ba là bội số có cùng nhân tử với các đại lượng thứ hai và thứ tư tương ứng, và nếu nhân các đại lượng thứ nhất và thứ ba với cùng một nhân tử thì các đại lượng thu được cũng sẽ là bội số có cùng nhân tử của các đại lượng thứ hai và thứ tư tương ứng.



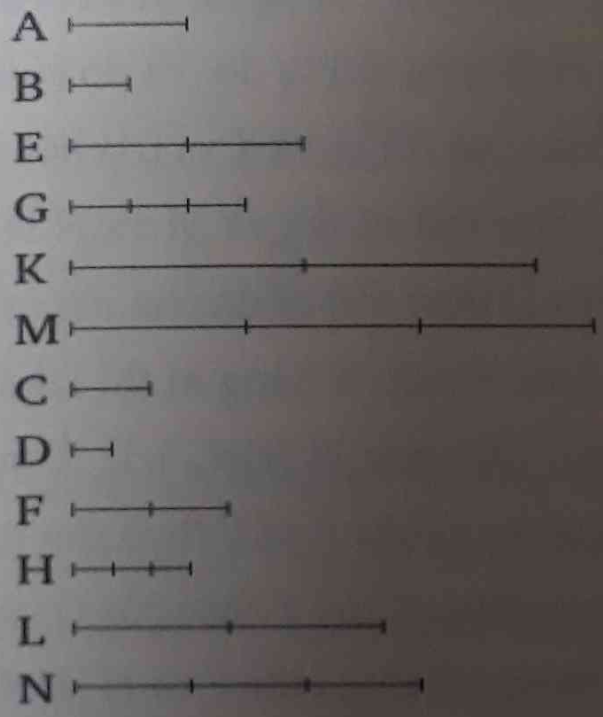
Giả sử các đại lượng thứ nhất A và thứ ba C tương ứng là bội số có cùng nhân tử với các đại lượng thứ hai B và thứ tư D, và nếu nhân A và C với cùng một nhân tử thì được các đại lượng tương ứng EF và GH. Có thể phát biểu rằng EF và GH là bội số có cùng nhân tử của A và C.

Do EF và GH là bội số có cùng nhân tử của A và C theo thứ tự đó, cho nên nếu AF nhiều hơn B bao nhiêu lần, thì GH cũng nhiều hơn C bấy nhiêu lần. Chia EF thành các đại lượng EK và KF bằng với A, và chia GH thành các đại lượng GL và LH bằng với C. Như vậy, số lượng các đại lượng EK, KF bằng với số lượng các đại lượng GL, LH. Do A và C có cùng một bội số lần tương ứng so với B và D, và EK bằng A và GL bằng D, cho nên EK và GL cũng có cùng một bội số lần tương ứng so với so với B và D. Do đó, vì các đại lượng thứ nhất EK và thứ ba GL có cùng một bội số lần tương ứng so với so với các đại lượng thứ hai B và thứ tư D, và các đại lượng thứ năm KF và thứ sáu LH cũng có cùng một bội số lần tương ứng so với so với các đại lượng thứ hai B và thứ tư D, cho nên nếu cộng các đại lượng thứ nhất và thứ năm với nhau, và cộng các đại lượng thứ ba và thứ sáu với nhau, thu được các đại lượng tổng EF và GH là bội số có cùng nhân tử của các đại lượng thứ hai B và thứ tư D [MĐ 5.2].

Như vậy, nếu các đại lượng thứ nhất và thứ ba là bội số

có cùng nhân tử với các đại lượng thứ hai và thứ tư tương ứng, và nếu nhân các đại lượng thứ nhất và thứ ba với cùng một nhân tử thì các đại lượng thu được cũng sẽ là bội số có cùng nhân tử của các đại lượng thứ hai và thứ tư tương ứng. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 4:</u> Nếu tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai bằng tỷ lệ của đại lượng thứ ba và đại lượng thứ tư, thì khi nhân các đại lượng thứ nhất và thứ ba với cùng một nhân tử thì các tỷ lệ giữa các tích số tương ứng thu được và các đại lượng thứ hai và thứ tư theo thứ tự tương ứng cũng bằng nhau mà không phụ thuộc vào giá trị của các nhân tử.



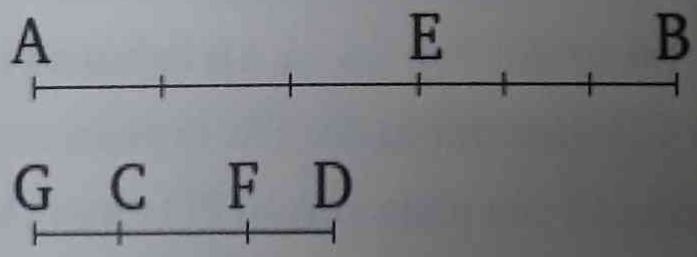
Giả sử tỷ lệ của đại lượng thứ nhất A so với đại lượng thứ hai B bằng tỷ lệ của đại lượng thứ ba C so với đại lượng thứ tư D, và E và F là các tích số thu được bằng cách nhân tương ứng A và C với cùng một nhân tử, và G và H là các tích số thu được bằng cách nhân tương ứng B và D với cùng một nhân tử bất kì khác. Có thể phát biểu rằng tỷ lệ của E so với G sẽ bằng với tỷ lệ của F so với H.

Tính được K và L bằng cách nhân tương ứng E và F với cùng một nhân tử, và M và N bằng cách nhân tương ứng G và H với cùng một nhân tử tuỳ ý khác.

Và do E và F là bội số có cùng nhân tử của A và C theo thứ tự đó, và K và L là bội số có cùng nhân tử của E và F theo thứ tự đó cho nên K và L là bội số có cùng nhân tử của A và C theo thứ tự đó [MĐ 5.3]. Tương tự, M và N là bội số có cùng nhân tử của B và D theo thứ tự đó. Và do tỷ lệ của A so với B bằng với tỷ lệ của C so với D, và K và L là bội số có cùng nhân tử của A và C thoe thứ tự đó, và M và N là bội số có cùng nhân tử của B và D theo thứ tự đó cho nên nếu K nhiều hơn M thì L nhiều hơn N, nếu K bằng M thì L bằng M, và nếu K nhỏ hơn M thì L nhỏ hơn N [ĐN. 5.5]. Trong thì K và L là bội số có cùng nhân tử của E và F theo thứ tự đó, và M và N là bội số có cùng nhân tử tuỳ ý khác của G và H. Cho nên, tỷ lệ giữa E và G bằng với tỷ lệ giữa F và H [ĐN 5.5].

Như vậy, nếu tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai bằng tỷ lệ của đại lượng thứ ba và đại lượng thứ tư, thì khi nhân các đại lượng thứ nhất và thứ ba với cùng một nhân tử thì các tỷ lệ giữa các tích số tương ứng thu được và các đại lượng thứ hai và thứ tư theo thứ tự tương ứng cũng bằng nhau mà không phụ thuộc vào giá trị của các nhân tử. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 5:</u> Nếu đại lượng này là bội số có cùng nhân tử của đại lượng kia, bỏ đi khỏi đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai các phần là bội số có cùng nhân tử của nhau theo thứ tự đó, thì phần còn lại của đại lượng thứ nhất cũng là bội số có cùng nhân tử của phần còn lại của đại lượng thứ hai theo thứ tự đó.



Giả sử đại lượng AB là bội số có cùng nhân tử của CD trong đó phần AE được bỏ ra so là bộ số có cùng nhân tử đó của phân được bỏ ra CF tương ứng theo thứ tự đó. Có

thể phát biểu rằng phần còn lại EB cũng sẽ là bội số có cùng nhân tử của phần còn lại FD như là toàn bộ AB so với CD theo thứ tự đó.

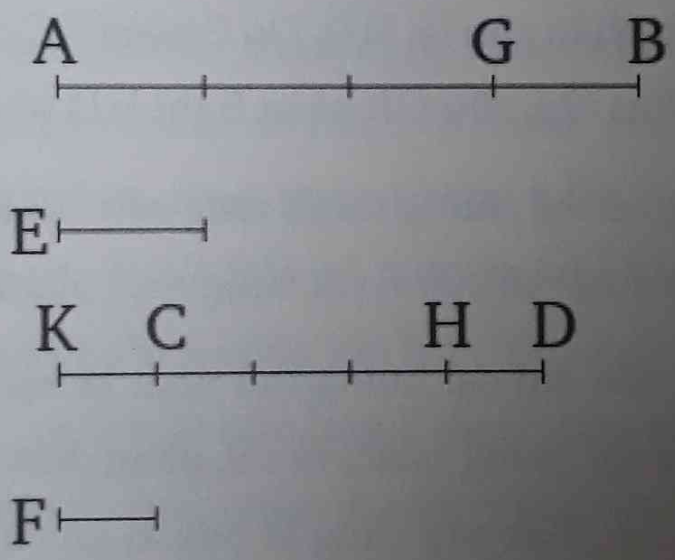
Lấy CG sao cho AE chia cho CF được bao nhiêu thì EB cũng chia cho CG được bấy nhiêu.

Và do AE và EB là bội số có cùng nhân tử của CF và GC theo thứ tự đó nên AE và AB là bội số có cùng nhân tử của CF và GF theo thứ tự đó [MĐ 5.1]. Và AE và AB được giả thiết là cácbội số có cùng nhân tử của CF và CD theo thứ tự đó. Vậy AB là bội số có cùng nhân tử của GF và CD. Tức là GF bằng CD. Bỏ CF từ cả hai đại lượng này thì phần còn lại GC bằng phần còn lại FD. Và do AE và EB là bội số có cùng nhân tử của CF và GC theo thứ tự đó, và GC bằng DF, cho nên AE và EB là bội số có cùng nhân tử của CF và FD theo thứ tự đó. Và do AE và AB là bội số có cùng nhân tử của CF và CD theo thứ tự đó. Vậy EB và AB là bội số có cùng nhân tử của FD và CD theo thứ tự đó. Tức là phần còn lại EB là bội số có cùng nhân tử của phần còn lại FD như là toàn bộ AB so với toàn bộ CD tương ứng.

Như vậy, nếu đại lượng này là bội số có cùng nhân tử của đại lượng kia, bỏ đi khỏi đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai các phần là bội số có cùng nhân tử của nhau theo thứ tự đó, thì phần còn lại của đại lượng thứ nhất cũng là bội số

có cùng nhân tử của phần còn lại của đại lượng thứ hai theo thứ tự đó. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 6:</u> Nếu hai đại lượng thứ nhất là bội số có cùng nhân tử của hai đại lượng khác, và các phần được lấy đi khỏi hai đại lượng thứ nhất này cũng là bội số có cùng nhân tử của hai đại lượng thứ hai thì các phần còn lại hoặc là bằng, hoặc là bội số có cùng nhân tử của các đại lượng thứ hai theo thứ tự đó.



Giả sử hai đại lượng AB và CD là bội số có cùng nhân tử của hai đại lượng E và F. Các phần AG và CH được lấy đi khỏi các đại lượng thứ nhất là bội số có cùng nhân tử của E và F. Có thể phát biểu rằng các phần còn lại GB và HD hoặc là bằng, hoặc là bội số có cùng nhân tử của các đại lượng E

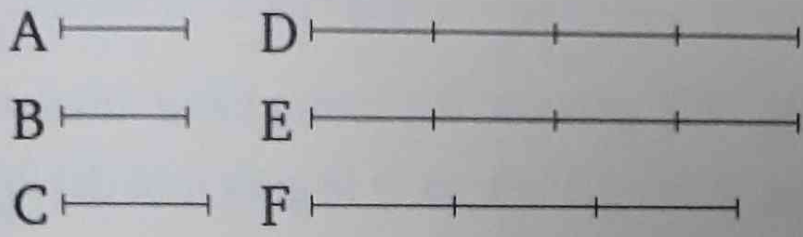
và F theo thứ tự đó.

Đầu tiên, lấy GB bằng E. Có thể phát biểu rằng HD cũng bằng F. Lấy CK bằng F. Do AG và CH là bội số có cùng nhân tử của E và F theo thứ tự đó, và GB bằng E, CK bằng F, cho nên AB và KH là bội số có cùng nhân tử của E và F theo thứ tự đó [MĐ 5.2]. Đã giả thiết rằng AB và CD là bội số có cùng nhân tử của E và F theo thứ tự đó. Cho nên KH và CD là bội số có cùng nhân tử của F và F. Nghĩa là KH và CD cùng là bội số có cùng nhân tử của F. Vậy KH bằng CD. Lấy đi phần bằng CH khỏi cả hai đại lượng này. Như vậy phần còn lại KC bằng phần còn lại HD. Do F bằng KC cho nên HD cũng bằng F. Như vậy, nếu GB bằng E thì HD phải bằng F.

Tương tự, có thể chứng minh rằng nếu GB là bội số của E thì HD cũng là bội số của F với cùng một nhân tử.

Như vậy, nếu hai đại lượng thứ nhất là bội số có cùng nhân tử của hai đại lượng khác, và các phần được lấy đi khỏi hai đại lượng thứ nhất này cũng là bội số có cùng nhân tử của hai đại lượng thứ hai thì các phần còn lại hoặc là bằng, hoặc là bội số có cùng nhân tử của các đại lượng thứ hai theo thứ tự đó. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 7:</u> Tỷ lệ giữa các đại lượng bằng nhau với cùng một đại lượng sẽ bằng nhau, và tỷ lệ giữa một đại lượng với các đại lượng bằng nhau cũng bằng nhau.



Giả sử A và B là các đại lượng bằng nhau và C là một đại lượng tuỳ ý khác. Có thể phát biểu rằng A và B có cùng tỷ lệ với C, và C có cùng tỷ lệ với A và B.

Lấy D và E là bội số có cùng nhân tử của A và B theo thứ tự đó, và F là bội số có nhân tử bất kỳ của C. Theo đó, vì D và E là bội số có cùng nhân tử của A và B, mà A bằng B, cho nên D bằng E. Và F là có một giá trị khác tuỳ ý. Do đó, nếu D lớn hơn F thì E cũng lớn hơn F, và nếu D bằng F thì E cũng bằng F, và nếu D nhỏ hơn F thì E cũng nhỏ hơn F. Và D và E là bội số có cùng nhân tử của A và B theo thứ tự đó, và F là bội số có nhân tử bất kỳ của C. Do đó, tỷ lệ của A so với C sẽ bằng với tỷ lệ của B so với C [ĐN. 5.5].

Cũng có thể nói rằng C có cùng tỷ lệ so với A và B.

Bằng cách lập luận tương tự, có thể chứng minh rằng D bằng E. Và F có một giá trị nào đó. Như vậy nếu F lớn hơn D

thì F cũng lớn hơn E, và nếu F bằng D thì F cũng bằng E, và nếu F nhỏ hơn D thì F cũng nhỏ hơn E. Và F là bội số của C, và D và E là một bội số có cùng nhân tử của A và B. Do đó, , tỷ lệ của C so với A sẽ bằng với tỷ lệ của C so với B [ĐN 5.5].

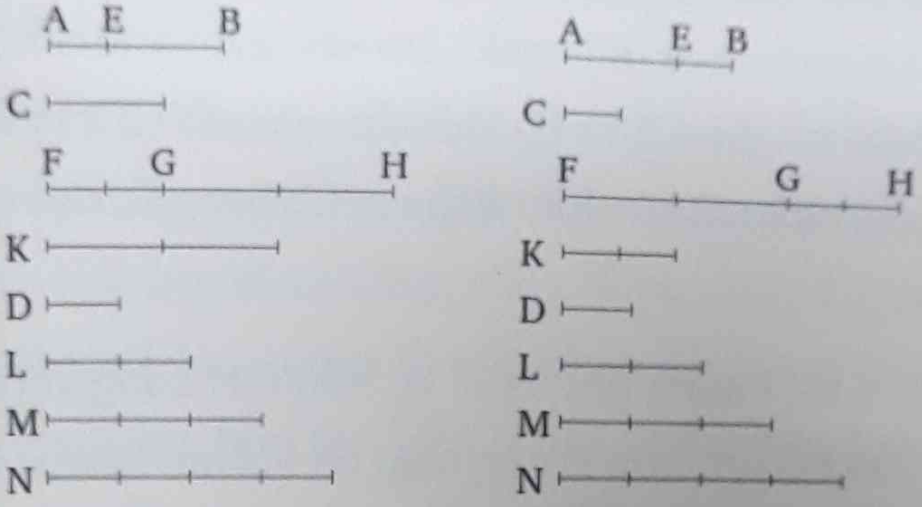
Như vậy, tỷ lệ giữa các đại lượng bằng nhau với cùng một đại lượng sẽ bằng nhau, và tỷ lệ giữa một đại lượng với các đại lượng bằng nhau cũng bằng nhau.

Hệ quả

Theo mệnh đề này thì rõ ràng là nếu các đại lượng tỷ lệ với nhau thì chúng cũng tỷ lệ theo chiều ngược lại. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 8:</u> Đối với các đại lượng không bằng nhau, thì tỷ lệ của đại lượng lớn hơn sẽ lớn hơn tỷ lệ của đại lượng nhỏ hơn khi so với cùng một đại lượng khác. Và tỷ lệ của đại lượng tham chiếu và đại lượng nhỏ hơn sẽ lớn hơn tỷ lệ của nó và đại lượng lớn hơn.

Giả sử AB và C là các đại lượng không bằng nhau và AB là đại lượng lớn hơn, D là một đại lượng bất kỳ khác. Có thể phát biểu rằng tỷ lệ của AB và D là lớn hơn tỷ lệ của C và D, và tỷ lệ của D và C sẽ lớn hơn tỷ lệ của C và AB.



Vì AB lớn hơn C, nên có thể lấy BE bằng C. Đại lượng nhỏ hơn trong số hai đại lượng AE và BE, khi được nhân lên một số lần nào đó, sẽ có khi lớn hơn C [ĐN. 5.4]. Đầu tiên, giả sử AE nhỏ hơn BE, và nhân AE lên một số lần, và có FG là tích nhận được lớn hơn D.Và nếu FG chia hết cho AE được bao nhiêu, thì GH cũng chia hết cho EB được bấy nhiêu, và K chia hết cho C cũng được kết quả như vậy. L là kết quả nhân hai của D, M là kết quả nhân ba của D, và một vài kết quả nữa, với nhân tử tăng dần từng đơn vị, cho đến khi có được bội số đầu tiên của D có giá trị lớn hơn K. Điều đó là thực hiện được và giả sử rằng bội số gấp 4 lần của D là N là bội số đầu tiên có giá trị lớn hơn K.

Như vậy, do K vừa nhỏ hơn N cho nên K sẽ không nhỏ hơn M. Và do FG và GH là bội số có cùng nhân tử của AE và EB, nên FG và FH cũng là bội số có cùng nhân tử của AE và

AB theo thứ tự đó [MĐ 5.1]. FG và K là bội số có cùng nhân tử của AE và C theo thứ tự đó. Do vậy, FH và K là bội số có cùng nhân tử của AB và C. Một lần nữa, do GH và K là bội số có cùng nhân tử của EB và C, mà EB bằng C, cho nên GH bằng K.

Và K thì không nhỏ hơn M. Nên GH cũng không nhỏ hơn M. Do FG lớn hơn D nên toàn bộ FH lớn hơn cả M và D cộng lại. M bằng ba lần D nên M và D cộng lại bằng bốn lần D, và N cũng chính bằng bốn lần D. Cho nên M và D cộng lại bằng N. Nhưng do FH lớn hơn M và D cộng lại. Cho nên FH lớn hơn N. K không lớn hơn N. FH và K là bội số có cùng nhân tử của AB và C, và N có một bội số bất kỳ của D. Do đó, tỷ lệ của AB và D lớn hơn tỷ lệ của C và D [MĐ 5.7].

Vậy, cũng có thể nói rằng tỷ lệ của D so với C lớn hơn tỷ lệ của D so với AB.

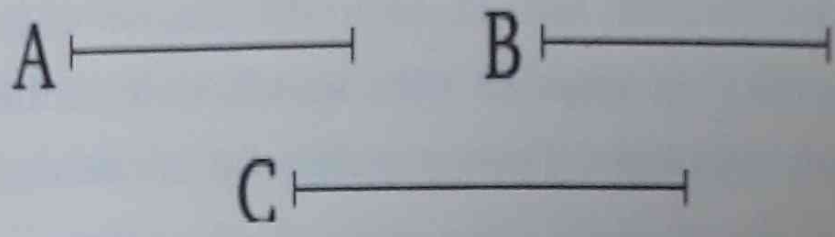
Bằng cách lập luận tương tự, có thể chỉ ra rằng N lớn hơn K, và N không lớn hơn FH. Và N là bội số của D, trong khi FH và K là bội số bất kỳ có cùng nhân tử của AB và C. Như vậy, tỷ lệ của D so với C lớn hơn tỷ lệ của D so với AB [ĐN. 5.5].

Và trong trường hợp AE lớn hơn EB. Nếu nhân số nhỏ hơn EB lên một số lần thì một lúc nào đó sẽ có được giá trị

lớn hơn D. Thực hiện phép toán như vậy và có được GH là bội số của EB và lớn hơn D. Nếu GH chia hết cho EB được bao nhiêu thì FG cũng chia hết cho AE, và K có thể chia hết cho C được bấy nhiêu. Tương tự như thế, có thể chứng minh là FH và K là bội số có cùng nhân tử của AB và C theo thứ tự đó. Với cách làm tương tự như phần đầu, có được N là bội số của D vừa lớn hơn FG. Nên FG lại không nhỏ hơn M. Mà GH lớn hơn D. Như vậy, toàn bộ phần FH lớn hơn D và M cộng lại, vốn bằng N. K không lớn hơn N, vì FG lớn hơn GH. Bằng cách lập luận tương tự như trên, có thể hoàn thành chứng minh theo cùng một cách làm.

Như vậy, đối với các đại lượng không bằng nhau, thì tỷ lệ của đại lượng lớn hơn sẽ lớn hơn tỷ lệ của đại lượng nhỏ hơn khi so với cùng một đại lượng khác. Và tỷ lệ của đại lượng tham chiếu và đại lượng nhỏ hơn sẽ lớn hơn tỷ lệ của nó và đại lượng lớn hơn. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 9:</u> Các đại lượng có cùng một tỷ lệ với cùng một đại lượng khác thì bằng nhau. Và nếu một đại lượng nào đó có cùng một tỷ lệ với các đại lượng khác, thì các đại lượng đó là bằng nhau.



Giả sử A và B có cùng một tỷ lệ với C. Có thể phát biểu rằng A bằng B.

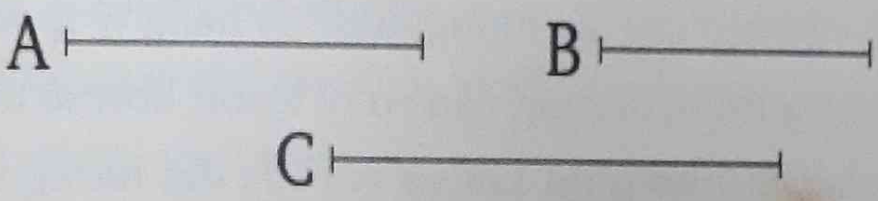
Nếu A khác B thì A và B sẽ có các tỷ lệ khác nhau so với C [MĐ 5.8]. Tuy nhiên, các tỉ lệ đó là bằng nhau. Do đó, A bằng B.

Lại giả sử C rằng có cùng một tỷ lệ so với A và B. Có thể phát biểu rằng A bằng B.

Bởi nếu A khác B thì C sẽ có các tỷ lệ khác nhau khi so với A và B. Tuy nhiên, các tỉ lệ đó là bằng nhau. Do đó, A bằng B.

Như vậy, các đại lượng có cùng một tỷ lệ với cùng một đại lượng khác thì bằng nhau. Và nếu một đại lượng nào đó có cùng một tỷ lệ với các đại lượng khác, thì các đại lượng đó là bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 10:</u> Khi các đại lượng được so bằng tỷ lệ với cùng một đại lượng thì đại lượng nào có tỷ lệ lớn hơn sẽ lớn hơn. Và tỷ lệ của đại lượng đó khi so với các đại lượng kia, đại lượng nào cho tỷ lệ lớn hơn sẽ là đại lượng nhỏ hơn.



Tỷ lệ của A và C lớn hơn tỷ lệ của B và C. Có thể phát biểu rằng A lớn hơn B.

Nếu điều này là sai thì A phải bằng hoặc nhỏ hơn B. Thực tế là A không bằng B. Vì nếu như vậy thì A và B sẽ có cùng một tỷ lệ so với C [MĐ 5.7]. Tuy nhiên, các tỷ lệ đó không bằng nhau. Vậy A không bằng B. A cũng không thể nhỏ hơn B vì nếu như vậy thì tỷ lệ A so với C sẽ nhỏ hơn tỷ lệ của B so với C [MĐ 5.8]. A không nhỏ hơn B, và A cũng không bằng B, do đó A phải lớn hơn B.

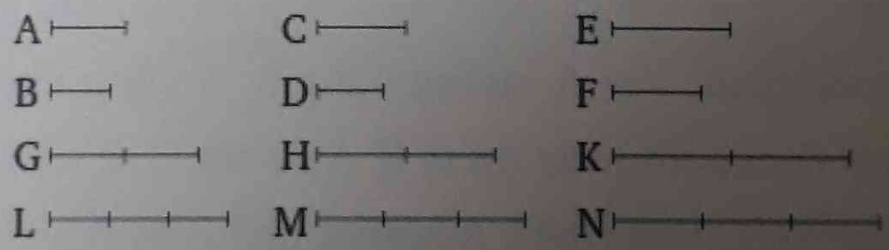
Lại giả sử rằng của tỷ lệ C và B lớn hơn tỷ lệ của C và A. Có thể phát biểu rằng B nhỏ hơn A.

Nếu điều này là sai thì B phải bằng hoặc lớn hơn A. Thực tế thì B không bằng A vì nếu như vậy thì C sẽ có cùng

một tỷ lệ so với A và B [MĐ 5.7]. Tuy nhiên, các tỷ lệ đó không bằng nhau. Tức là B không bằng A. B cũng không thể lớn hơn A, vì nếu như vậy thì tỷ lệ C so với B sẽ nhỏ hơn tỷ lệ C so với A [MĐ 5.8]. B không lớn hơn A, và B cũng không bằng A, do đó B phải nhỏ hơn A.

Như vậy, khi các đại lượng được so bằng tỷ lệ với cùng một đại lượng thì đại lượng nào có tỷ lệ lớn hơn sẽ lớn hơn. Và tỷ lệ của đại lượng đó khi so với các đại lượng kia, đại lượng nào cho tỷ lệ lớn hơn sẽ là đại lượng nhỏ hơn. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 11:</u> Các tỷ lệ cùng bằng một tỷ lệ cho trước thì cũng sẽ bằng nhau.



Có A so với B bằng C so với D, và C so với D bằng E so với F. Có thể phát biểu rằng A so với B bằng E so với F.

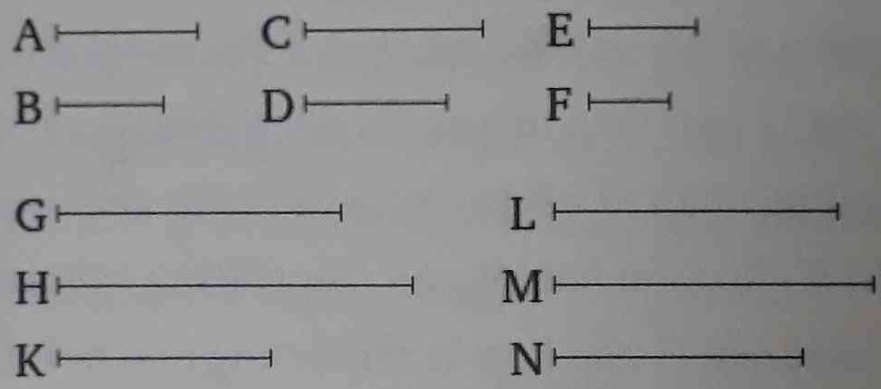
Nếu lấy G, H, K là các bội số có cùng nhân tử của A, C, E theo thứ tự đó, và lấy L, M, N là các bội số có cùng nhân tử của bất kì của B, D, F.

Và do tỷ lệ A so với B bằng tỷ lệ C so với D, và G và H là các bội số có cùng nhân tử của A và C theo thứ tự đó, đồng thời L và M là các bội số có cùng nhân tử bất kì của B và D theo thứ tự đó, cho nên nếu G lớn hơn L thì H cũng lớn hơn M, còn nếu G bằng L thì H cũng bằng M, hoặc nếu G nhỏ hơn L thì H cũng nhỏ hơn M [ĐN. 5.5]. Tương tự, do tỷ lệ C so với D bằng tỷ lệ E so với F, và H và K là các bội số có cùng nhân tử của C và E theo thứ tự đó, đồng thời M và N là các bội số có cùng nhân tử bất kì của D và F, cho nên nếu H lớn hơn M thì K cũng lớn hơn N, còn nếu H bằng M thì K cũng bằng N, hoặc nếu H nhỏ hơn M thì K cũng nhỏ hơn N [ĐN. 5.5].

Nhưng nếu H lớn hơn M thì G cũng lớn hơn L, và nếu H bằng M thì G cũng bằng L, và nếu H nhỏ hơn M thì G cũng nhỏ hơn L. Và do vậy, nếu G lớn hơn L thì K lớn hơn N, và nếu G bằng L thì K bằng N, và nếu G nhỏ hơn L thì K nhỏ hơn N. G và K là các bội số lần có cùng nhân tử của A và E, và L và N là các bội số có cùng nhân tử bất kỳ khác của B và F, cho tỷ lệ A so với B bằng tỷ lệ E so với F [ĐN. 5.5].

Như vậy, các tỷ lệ cùng bằng một tỷ lệ cho trước thì cũng sẽ bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 12: Nếu có một số lượng bất kỳ các đại lượng nào đó tỷ lệ với nhau thì tỷ lệ của một đại lượng thuộc nhóm đứng trước so với đại lượng thuộc nhóm sau sẽ bằng tỷ lệ của tất cả các đại lượng thuộc nhóm trước so với tỷ lệ của tất cả các đại lượng thuộc nhóm sau.



Giả sử có các đại lượng A, B, C, D, E, F tỷ lệ với nhau, theo đó tỷ lệ A so với C bằng tỷ lệ C so với D và tỷ lệ E so với F, nói cách khác là tỷ lệ A so với B sẽ bằng tỷ lệ A, C, E so với B, D, F. Gọi G, K, H là các bội số của A, C, E theo thứ tự đó khi nhân chúng với cùng nhân tử, và khi nhân L, M, N là các bội số của B, D, F theo thứ tự đó khi nhân chúng với cùng nhân tử bất kỳ.

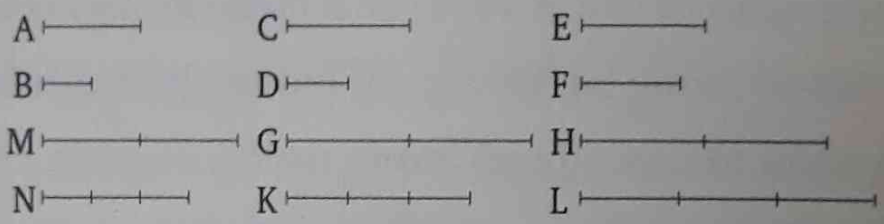
Vì tỷ lệ A so với B bằng với tỷ lệ C so với D và tỷ lệ E so với F, và G, H, K là các bội số có cùng nhân tử của A, C, E theo thứ tự đó, và L, M, N là các bội số bất kì có cùng nhân tử của B, D, F, nên nếu G lớn hơn L thì H cũng lớn hơn M, và

K lớn hơn N, và nếu G bằng L thì H cũng bằng M và L bằng N, và nếu G nhỏ hơn L thì H cũng nhỏ hơn M và L nhỏ hơn N theo [MĐ. 5.5].

Do vậy, nếu G lớn hơn L thì G, H, K lớn hơn L, M, N, còn nếu G bằng L thì G, H, K bằng L, M, N, và nếu G nhỏ hơn L thì G, H, K nhỏ hơn L, M, N. Và G và G, H, K là bội số có cùng nhân tử của A và A, C, E theo thứ tự đó, cho nên nếu có một số lượng bất kỳ các đại lượng cho trước là bội số có cùng nhân tử của một số lượng tương ứng các đại lượng khác, và một trong số các đại lượng thứ nhất có thể chia cho đại lượng tương ứng trong nhóm thứ hai được bao nhiêu, thì tất cả các đại lượng thứ nhất cũng có thể chia hết cho tất cả các đại lượng tương ứng trong nhóm thứ hai được bấy nhiêu, [MĐ 5.1]. Lập luận tương tự, L và L, M, N là bội số có cùng nhân tử của B và B, D, F. Do đó tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của A, C, E và B, D, F.

Như vậy, nếu có một số lượng bất kỳ các đại lượng nào đó tỷ lệ với nhau thì tỷ lệ của một đại lượng thuộc nhóm đứng trước so với đại lượng thuộc nhóm sau sẽ bằng tỷ lệ của tất cả các đại lượng thuộc nhóm trước so với tỷ lệ của tất cả các đại lượng thuộc nhóm sau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 13: **Nếu tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai bằng tỷ lệ của đại lượng thứ ba và đại lượng thứ tư, và tỷ lệ của đại lượng thứ và đại lượng thứ tư lớn hơn tỷ lệ của đại lượng thứ năm và đại lượng thứ sáu, thì tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai cũng sẽ lớn hơn tỷ lệ của đại lượng thứ năm và đại lượng thứ sáu.**



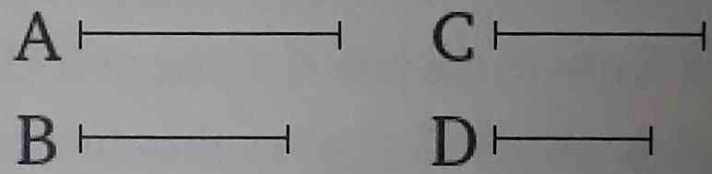
Giả sử tỷ lệ của đại lượng thứ nhất A và đại lượng thứ hai B bằng tỷ lệ của đại lượng thứ ba C và đại lượng thứ tư D, và giả sử tỷ lệ của đại lượng thứ ba C và đại lượng thứ tư D lớn hơn tỷ lệ của đại lượng thứ năm E và đại lượng thứ sáu F. Có thể phát biểu rằng tỷ lệ của đại lượng thứ nhất A và đại lượng thứ hai B cũng sẽ lớn hơn tỷ lệ của đại lượng thứ năm E và đại lượng thứ sáu F.

Sẽ tồn tại các bội số có cùng nhân tử của C và E, và các bội số có cùng nhân tử nào đó của D và F sao cho bội số của C lớn hơn bội số của D, đồng thời bội số của E không lớn hơn bội số của F [ĐN. 5.7], hãy chọn các bội số đó Chẳng hạn G và H là các bội số có cùng nhân tử của C và E theo thứ tự đó, và K và L là bội số có cùng nhân tử của D và F theo thứ

tự đó, sao cho G lớn hơn K đồng thời H không lớn hơn L. Vì G có thể chia cho C được bao nhiêu thì M cũng có thể chia cho A được bấy nhiêu, và K có thể chia hết cho D được bao nhiêu thì nên N cũng có thể chia cho B được bấy nhiêu. Do tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của C và D, và M và G là các bội số có cùng nhân tử của A và C theo thứ tự đó, đồng thời N và K là các bội số có cùng nhân tử bất kỳ của B và D theo thứ tự đó nên nếu M lớn hơn N thì G lớn hơn K, còn nếu M bằng N thì G bằng K, và nếu M nhỏ hơn N thì G nhỏ hơn K [ĐN. 5.5]. Vì G lớn hơn K nên M lớn hơn N. Cũng có H không lớn hơn L, và M và H là các bội số có cùng nhân tử của A và E theo thứ tự đó, và N và L lá các bội số có cùng nhân tử bất kỷ của B và F theo thứ tự đó. Do đó, tỷ lệ của A so với B lớn hơn tỷ lệ của E so với F [ĐN. 5.7].

Như vậy, nếu tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai bằng tỷ lệ của đại lượng thứ ba và đại lượng thứ tư, và tỷ lệ của đại lượng thứ và đại lượng thứ tư lớn hơn tỷ lệ của đại lượng thứ năm và đại lượng thứ sáu, thì tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai cũng sẽ lớn hơn tỷ lệ của đại lượng thứ năm và đại lượng thứ sáu. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 14:</u> Nếu tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai bằng tỷ lệ của đại lượng thứ ba và đại lượng thứ tư, và đại lượng thứ nhất lớn hơn đại lượng thứ ba, thì đại lượng thứ hai cũng sẽ lớn hơn đại lượng thứ tư. Và nếu đại lượng thứ nhất bằng đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ hai cũng sẽ bằng đại lượng thứ tư. Và nếu đại lượng thứ nhất nhỏ hơn đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ hai cũng sẽ nhỏ hơn đại lượng thứ tư.



Giả sử tỷ lệ của đại lượng A so với đại lượng B bằng tỷ lệ của đại lượng C so với đại lượng D. Và giả sử A lớn hơn C. Có thể phát biểu rằng B cũng lớn hơn D.

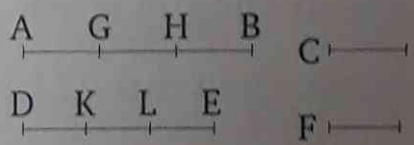
Vì A lớn hơn C, và B là đại lượng tùy ý, do đó tỷ lệ của A và B lớn hơn tỷ lê của C và B [MĐ. 5.8]. Và tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của C và D. Như vậy, tỷ lệ của C và D cũng lớn hơn tỷ lệ của C và B. Và đại lượng nào khi được so với cùng một đại lượng mà cho ra tỷ lệ lớn hơn thì nhỏ hơn [MĐ. 5.10] Như thế thì, D nhỏ hơn B. Vậy B lớn hơn D.

Tương tự, có thể chứng minh rằng khi mà A bằng C thì thì B cũng bằng D; và khi mà A nhỏ hơn C thì B cũng nhỏ

hơn D.

Như vậy, nếu tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai bằng tỷ lệ của đại lượng thứ ba và đại lượng thứ tư, và đại lượng thứ nhất lớn hơn đại lượng thứ ba, thì đại lượng thứ hai cũng sẽ lớn hơn đại lượng thứ tư. Và nếu đại lượng thứ nhất bằng đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ hai cũng sẽ bằng đại lượng thứ tư. Và nếu đại lượng thứ nhất nhỏ hơn đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ hai cũng sẽ nhỏ hơn đại lượng thứ tư. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 15:</u> Các phần thì có cùng tỷ lệ với nhau như các bội số cùng nhân tử của chúng, theo thứ tự tương ứng.



Gọi AB và DE lần lượt là bội số có cùng nhân tử của C và F. Có thể phát biểu rằng tỉ lệ của C và F bằng với tỉ lệ của AB và DE

Bởi vì, AB và DE là bội số có cùng nhân tử của C và F theo thứ tự đó, cho nên có bao nhiêu lần C trong AB thì cũng có bấy nhiêu lần F trong DE. Chia AB thành các đại lượng

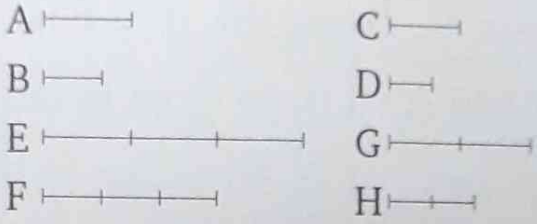
AG, GH, HB bằng với C, và chia DE thành DK, KL, LE bằng với F. Như vậy, số lượng các đại lượng AG, GH và HB bằng với số lượng các đại lượng DK, KL, LE. Và bởi vì AG, GH, HB bằng nhau, và DK, KL, LE cũng bằng nhau, cho nên AG bằng DK, GH bằng KL và HB bằng LE [MĐ 5.6]. Và như vậy, đối với các đại lượng tỉ lệ, tỷ lệ của một trong các đại lượng nhóm trước với một trong các đại lượng nhóm sau như thế nào thì tỉ lệ của toàn bộ các đại lượng nhóm trước với toàn bộ đại lượng nhóm sau cũng như thế ấy [MĐ 5.12]. Do đó, tỷ lệ của AG và DK là bao nhiêu thì tỷ lệ của AD và DE cũng là bấy nhiêu. Mà AG thì bằng C, và DK thì bằng F. Vậy, khi tỷ lệ của C và F bằng bao nhiêu thì tỷ lệ của AB và DE bằng bấy nhiêu.

Vậy, các phần thì có cùng tỷ lệ với nhau như các bội số cùng nhân tử của chúng, theo thứ tự tương ứng. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 16:</u> Nếu bốn đại lượng là tỷ lệ thì chúng cũng tỷ lệ chéo.

Gọi A, B, C và D là bốn đại lượng tỷ lệ sao cho tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của C và D. Có thể phát biểu rằng các đại lượng đó cũng tỷ lệ chéo với nhau, tức là tỷ lệ của A và C

cũng bằng tỷ lệ của B và D.



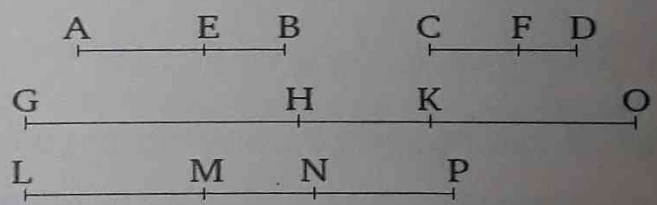
Giả sử E và F lần lượt là các bội số cùng nhân tử của của A và B, và G và H lần lượt cũng là các bội số có cùng nhân tử tùy ý của C và D.

Vì E, F lần lượt là các bội số có cùng nhân tử của A và B, mà tỷ lệ giữa các phần của các bội số thì bằng tỷ lệ giữa các bội số đó [MĐ. 5.15], do đó tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của E và F. Nhưng tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của C và D. Và vì vậy, tỷ lệ của C và D bằng tỷ lệ của E và F [MĐ 5.11]. Tiếp tục, bởi G và H lần lượt là các bội số có cùng nhân tử của C và D, chó nên tỷ lệ của C và D bằng tỷ lệ của G và H [MĐ 5.15]. Nhưng tỷ lệ của C và D bằng tỷ lệ của E và F. Và vì vậy tỷ lệ của E và F bằng tỷ lệ của G và H [MĐ 5.11]. Và nếu bốn đại lượng là tỷ lệ, và đại lượng thứ nhất lớn hơn đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ hai cũng lớn hơn đại lượng thứ tư, và nếu đại lượng thứ nhất bằng đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ hai cũng bằng đại lượng thứ tư, và nếu đại lượng thứ nhất nhỏ hơn đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ hai cũng nhỏ hơn đại

lượng thứ tư [MĐ 5.14]. Vậy, nếu E lớn hơn G thì F cũng lớn hơn H, nếu E bằng G thì F cũng bằng H, và nếu E nhỏ hơn G thì F cũng nhỏ hơn H. Trong thì, E và F lần lượt là các bội số có cùng nhân tử của A và B, và G và H lần lượt là các bội số có cùng nhân tử của C và D. Như vậy, tỷ lệ của A và C bằng tỷ lệ của B và D [ĐN 5.5].

Vậy, nếu bốn đại lượng là tỷ lệ thì chúng cũng tỷ lệ chéo. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 17:</u> Nếu các đại lượng gồm nhiều đại lượng hợp phần là tỷ lệ với nhau thì các hợp phần cũng tỷ lệ với nhau khi phân tách ra.



Giả sử AB, BE, CD và DF là các đại lượng gồm đại lượng hợp phần tỷ lệ trong đó tỷ lệ của AB và BE bằng tỷ lệ của CD và DF. Có thể phát biểu rằng các đại lượng này cũng tỷ lệ khi phân tách, tức là tỷ lệ của AE và EB bằng tỷ lệ của CF và DF.

Gọi GH, HK, LM và MN lần lượt là các bội số có cùng nhân tử của AE, EB, CF và FD, cũng gọi KO và NP lần lượt là

các bội số có cùng nhân tử tùy ý của EB và FD.

Vì GH và HK lần lượt là các bội số có cùng nhân tử của AE là EB nên GH và GK cũng là các bội số có cùng nhân tử của AE và AB theo thứ tự đó [MĐ 5.1]. Trong thì GH và LM lần lượt là các bội số có cùng nhân tử của AE và CF. Vậy GK và LM là các bội số có cùng nhân tử của AB và CF theo thứ tự đó. Tương tự, vì LM và MN lần lượt là các bội số có cùng nhân tử của CF và FD nên LM và MN cũng là các bội số có cùng nhân tử của CF và CD theo thứ tự đó [MĐ 5.1]. Và LM và GK lần lượt là các bội số có cùng nhân tử của của CF và AB. Vậy GK và LN là các bội số có cùng nhân tử của AB và CD theo thứ tự đó. Như thế thì GK, LN là các bội số có cùng nhân tử của của AB, CD. Tương tự, do HK và MN lần lượt là các bội số có cùng nhân tử của EB và FD, và KO và NP cũng là các bội số có cùng nhân tử của EB và FD theo thứ tự đó cho nên, cộng gộp lại, HO và MP cũng lần lượt là các bội số có cùng nhân tử của EB và FD [MĐ 5.2].

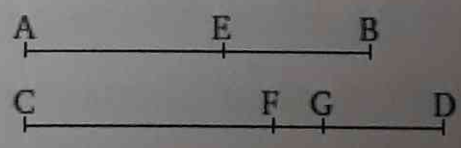
Và bởi vì tỷ lệ của AB và BE bằng tỷ lệ của CD và DF, và lấy các bội số có cùng nhân tử của AB, CD là GK, LN, và của EB, FD là HO, MP, cho nên nếu GK lớn hơn HO thì LN cũng lớn hơn MP, và nếu GK bằng HO thì LN cũng bằng MP, và nếu GK nhỏ hơn HO thì LN cũng nhỏ hơn MP [ĐN 5.5].

Giả sử GK lớn hơn HO, và vì vậy nếu trừ HK ra khỏi cả

hai đại lượng đó thì GH cũng lớn hơn KO. Nhưng nếu GK lớn hơn Ho thì LN cũng lớn hơn MP. Vậy, với LN lớn hơn MP và trừ MN ra khỏi cả hai đại lượng đó thì LM cũng lớn hơn NP. Như vậy, nếu GH lớn hơn KO thì LM cũng lớn hơn NP. Tương tự, có thể chứng minh rằng khi mà GH bằng KO thì LM cũng bằng NP, và khi mà GH nhỏ hơn KO thì LM nhỏ hơn NP. Và GH, LM là các bội số có cùng nhân tử của AE, CF, và KO, NP là các bội số có cùng nhân tử bất kì của EB, NP. Vậy, tỷ lệ của AE và EB bằng với tỷ lệ của CF và FD [ĐN 5.5].

Vậy, nếu các đại lượng gồm nhiều đại lượng hợp phần là tỷ lệ với nhau thì các hợp phần cũng tỷ lệ với nhau khi phân tách ra. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 18:</u> Nếu các đại lượng riêng rẽ là tỷ lệ với nhau thì chúng cũng tỷ lệ với nhau khi cộng lại.



Giả sử AE, EB, CF và FD là các đại lượng riêng rẽ tỷ lệ với nhau, sao cho tỷ lệ của AE và EB bằng với tỷ lệ của CF và

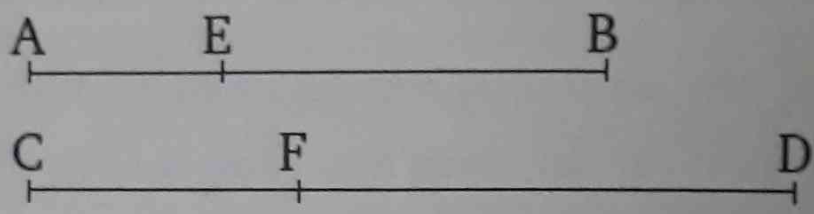
FD. Có thể phát biểu rằng khi cộng lại chúng cũng *tỷ lệ, tức* là tỷ lệ của AB và BE bằng tỷ lệ của CD và FD.

Bởi vì nếu tỷ lệ của AB và BE không bằng tỷ lệ của CD và FD thì rõ ràng thì tỷ lệ của AB và BE sẽ bằng tỷ lệ của CD và một đại lượng nào đó lớn hơn hoặc nhỏ hơn FD.

Trước tiên, xét trường hợp đại lượng đó nhỏ hơn FD, gọi là DG. Và vì các đại lượng hợp phần là tỷ lệ, tức là tỷ lệ của AB và BE bằng tỷ lệ của CD và DG, nên chúng cũng tỷ lệ khi phân tách ra [MĐ 5.17]. Như vậy, tỷ lệ của AE và EB bằng tỷ lệ của CG và GD. Nhưng cũng có giả thiết là tỷ lệ của AE và EB bằng tỷ lệ của CF và FD. Như vậy trong trường hợp này tỷ lệ của CG và GD cũng bằng tỷ lệ của CF và FD [MĐ 5.11]. Và đại lượng thứ nhất CG lớn hơn đại lượng thứ ba CF. Do đó, đại lượng thứ hai GD cũng lớn hơn đại lượng thứ tư FD [MĐ 5.14]. Mà đồng thời nó cũng nhỏ hơn. Điều này là không thể. Vậy khả năng tỷ lệ của AB và BE nhỏ hơn tỷ lệ của CD và FD là không xảy ra trong trường hợp này. Tương tự, có thể chứng minh rằng trường hợp đại lượng đó lớn hơn FD cũng không xảy ra. Vậy chỉ còn trường hợp đại lượng đó bằng FD.

Như vậy, nếu các đại lượng phân tách là tỷ lệ thuận thì hợp phần của chúng cũng tỷ lệ thuận. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 19:</u> Nếu tỷ lệ của đại lương tổng này và đại lượng tổng kia bằng tỷ lệ của hai phần được lấy đi khỏi chúng thì tỷ lệ của phần còn lại này và phần còn lại kia cũng bằng tỷ lệ giữa hai đại lượng tổng.



Giả sử tỷ lệ của đại lượng tổng AB và đại lượng tổng CD bằng tỷ lệ của phần được lấy đi AE và phần được lấy đi CF. Có thể phát biểu rằng rằng tỷ lệ của phần còn lại EB và phần còn lại FD cũng bằng tỷ lệ của AB và CD.

Vì tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của AE và CF nên theo tỷ lệ chéo thì tỷ lệ của BA và AE cũng bằng tỷ lệ của DC và CF [MĐ 5.16]. Và nếu các đại lượng gồm nhiều đại lượng hợp phần là tỷ lệ với nhau thì các hợp phần cũng tỷ lệ với nhau khi phân tách ra, như vậy tỷ lệ của BE và EA bằng tỷ lệ của DF và CF [MĐ 5.17]. Cũng vậy, theo tỷ lệ chéo, tỷ lệ của BE và DF bằng tỷ lệ của EA và FC [MĐ 5.16]. Trong thì đã giả thiết rằng tỷ lệ của AE và CF bằng tỷ lệ của đại lượng tổng AB và đại lượng tổng CD. Như vậy, tỷ lệ của phần còn lại EB và phần còn lại FD cũng bằng tỷ lệ của AB và CD.

Như vậy, nếu tỷ lệ của đại lương tổng này và đại lượng

tổng kia bằng tỷ lệ của hai phần được lấy đi khỏi chúng thì tỷ lệ của phần còn lại này và phần còn lại kia cũng bằng tỷ lệ giữa hai đại lượng tổng. Đây là điều cần phải chứng minh.

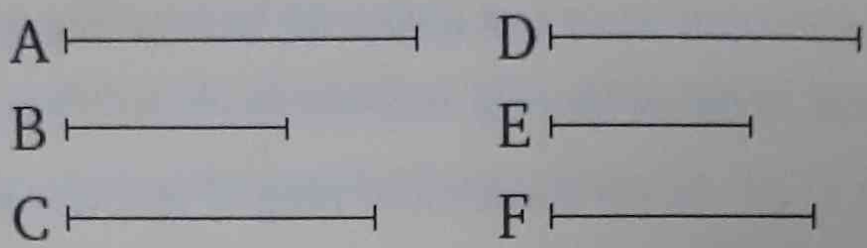
[Và vì đã chứng minh được rằng tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của EB và FD nên, theo tỷ lệ chéo, tỷ lệ của AB và BE cũng bằng tỷ lệ của CD và FD. Như vậy, các đại lượng tổng là tỷ lệ. Và cũng đã chứng minh được rằng tỷ lệ của BA và AE bằng tỷ lệ của DC và CF. Và phát biểu sau được nghịch đảo từ phát biểu trước.]

Hệ quả

Vậy từ mệnh đề trên, rõ ràng rằng nếu các đại lượng gồm nhiều đại lượng hợp phần là tỷ lệ thì chúng cũng tỷ lệ khi được nghịch đảo. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 20:</u> Nếu cho ba đại lượng, và cùng một số lượng ấy các đại lượng khác, có cùng tỷ lệ theo từng cặp, và khi so sánh bắc cầu, thì, nếu đại lượng thứ nhất lớn hơn đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ tư cũng lớn hơn đại lượng thứ sáu. Và nếu đại lượng thứ nhất bằng đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ tư cũng bằng đại lượng thứ sáu. Và nếu đại lượng thứ nhất nhỏ hơn đại lượng thứ ba thì

đại lượng thứ tư cũng nhỏ hơn đại lượng thứ sáu.



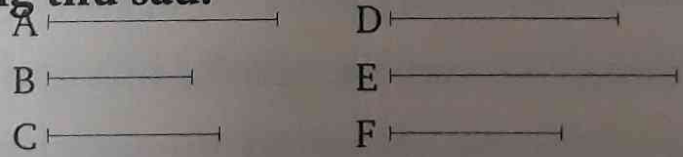
A, B, C là ba đại lượng, và D, E, F là các đại lượng khác với cùng số lượng, từng cặp một có tỷ lệ bằng nhau, tức là tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của D và E, và tỷ lệ của B và C bằng tỷ lệ của E và F. Và khi so sánh bắc cầu, giả sử A lớn hơn C. Có thể phát biểu rằng D cũng lớn hơn F. Và nếu A bằng C thì D cũng bằng F. Và nếu A nhỏ hơn C thì D cũng nhỏ hơn F.

Vì A lớn hơn C, và B là đại lượng bất kỳ, mà khi so với cùng một đại lượng khác thì đại lượng lớn hơn có tỷ lệ lớn hơn đại lượng nhỏ hơn [MĐ. 5.8], do đó tỷ lệ của A và B lớn hơn tỷ lệ của C và B. Nhưng tỷ lệ của A và B lại bằng tỷ lệ của D và E. Và, ngược lại, tỷ lệ của C và B bằng tỷ lệ của F và E [HQ. MĐ 5.7]. Vậy tỷ lệ của D và E cũng lớn hơn tỷ lệ của F và E. Và bởi vì khi các đại lượng có tỷ lệ với cùng một đại lượng khác thì đại lượng có tỷ lệ lớn hơn là lớn hơn [MĐ 5.10]. Do đó, D lớn hơn F. Tương tự, có thể chứng minh rằng, khi A bằng C thì D cũng sẽ bằng F, và khi A nhỏ hơn C thì D nhỏ hơn F.

Như vậy, nếu cho ba đại lượng, và cùng một số lượng ấy

các đại lượng khác, có cùng tỷ lệ theo từng cặp, và khi so sánh bắc cầu, thì, nếu đại lượng thứ nhất lớn hơn đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ tư cũng lớn hơn đại lượng thứ sáu. Và nếu đại lượng thứ nhất bằng đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ tư cũng bằng đại lượng thứ sáu. Và nếu đại lượng thứ nhất nhỏ hơn đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ tư cũng nhỏ hơn đại lượng thứ sáu. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 21:</u> Nếu cho ba đại lượng, và cùng một số lượng ấy các đại lượng khác, có cùng tỷ lệ theo từng cặp, và nếu tỉ lệ giữa chúng là chéo cặp, thì khi so sánh bắc cầu, nếu đại lượng thứ nhất lớn hơn đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ tư cũng lớn hơn đại lượng thứ sáu. Và nếu đại lượng thứ nhất bằng đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ tư cũng bằng đại lượng thứ sáu. Và nếu đại lượng thứ nhất nhỏ hơn đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ tư cũng nhỏ hơn đại lượng thứ sáu.



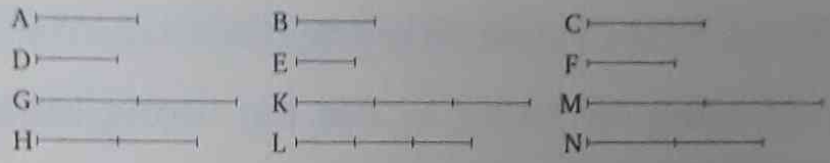
A, B và C là ba đại lượng, và D, E, F là các đại lượng khác với cùng số lượng, từng cặp một có tỷ lệ bằng nhau. Và có tỷ lệ giữa chúng là chéo cặp, tức tỉ lệ của A và B bằng tỉ lệ

của E và F, và tỉ lệ của B và C bằng tỉ lệ của D và E. Và khi so sánh bắc cầu, giả sử A lớn hơn C. Có thể phát biểu rằng D cũng sẽ lớn hơn F. Và nếu A bằng C thì D cũng sẽ bằng F. Và nếu A nhỏ hơn C thì D cũng nhỏ hơn F.

Vì A lớn hơn C, và B là đại lượng bất kỳ, do đó tỷ lệ của A và B lớn hơn tỷ lệ của C và B [MĐ. 5.8]. Nhưng tỷ lệ của A và B lại bằng tỷ lệ của E và F. Và, ngược lại, tỷ lệ của C và B bằng tỷ lệ của E và D [HQ. MĐ 5.7]. Vậy tỷ lệ của E và F cũng lớn hơn tỷ lệ của E và D. Và bởi vì khi cùng một đại lượng với các đại lượng khác thì đại lượng cho tỷ lệ nhỏ hơn là lớn hơn [MĐ 5.10]. Do đó, F nhỏ hơn D. Tức là, D lớn hơn F. Tương tự, có thể chứng minh rằng, khi A bằng C thì D cũng sẽ bằng F, và khi A nhỏ hơn C thì D nhỏ hơn F.

Như vậy, nếu cho ba đại lượng, và cùng một số lượng ấy các đại lượng khác, có cùng tỷ lệ theo từng cặp, và nếu tỉ lệ giữa chúng là chéo cặp, thì khi so sánh bắc cầu, nếu đại lượng thứ nhất lớn hơn đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ tư cũng lớn hơn đại lượng thứ sáu. Và nếu đại lượng thứ nhất bằng đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ tư cũng bằng đại lượng thứ sáu. Và nếu đại lượng thứ nhất nhỏ hơn đại lượng thứ ba thì đại lượng thứ tư cũng nhỏ hơn đại lượng thứ sáu. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 22:</u> Nếu có một số lượng bất kỳ các đại lượng nào đó, và lại có cùng số lượng ấy các đại lượng khác, theo đó chúng có cùng tỷ lệ theo từng cặp, thì tất cả chúng cũng có chung tỷ lệ khi so sánh bắc cầu.



Cho ba đại lượng bất kỳ A, B, C, và các đại lượng khác D, E, F với cùng số lượng, có cùng tỷ lệ theo từng cặp, tức là tỷ lệ của A và B bằng tỉ lệ của D và E, và tỷ lệ của B và C bằng tỷ lệ của E và F. Có thể phát biểu rằng chúng có cùng một tỷ lệ khi so sánh bắc cầu.

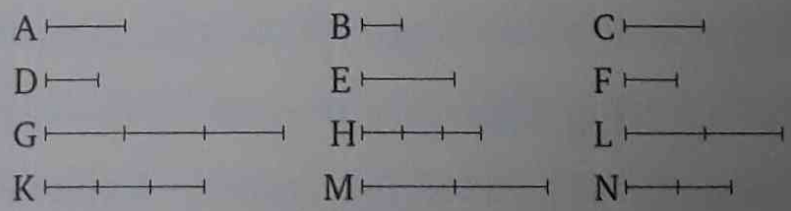
Lần lượt có G và H là các bội số có cùng nhân tử của A và D theo thứ tự đó, K và L là các bội số có cùng nhân tử tùy ý của B và E theo thứ tự đó, và M và N là các bội số có cùng nhân tử tùy ý của C và F theo thứ tự đó.

Vì tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của D và E, G và H lần lượt là bội số có cùng nhân tử của A và D, K và L lần lượt là bội số có cùng nhân tử của B và E, nên tỷ lệ của G và K bằng tỷ lệ của H đối với L [MĐ 5.4]. Và cũng vì lý do đó, tỷ lệ của K và M bằng tỷ lệ của L và N. Theo đó, vì G, K và M là các đại lượng, H, L và N các đại lượng khác có cùng số lượng, có cùng tỷ lệ theo từng cặp, cho nên, khi so sánh bắc cầu, nếu

G lớn hơn M thì H cũng lớn hơn N [MĐ 5.20]. Và G và H là các bội số có cùng nhân tử của A và D theo thứ tự đó, M và N là các bội số có cùng nhân tử tùy ý của C và F theo thứ tự đó. Như vậy, tỷ lệ của A và C bằng tủ lệ của D và F [ĐN 5.5]

Như vậy, Nếu có một số lượng bất kỳ các đại lượng nào đó, và lại có cùng số lượng ấy các đại lượng khác, theo đó chúng có cùng tỷ lệ theo từng cặp, thì tất cả chúng cũng có chung tỷ lệ khi so sánh bắc cầu. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 23:</u> Nếu cho ba đại lượng, và cùng một số lượng ấy các đại lượng khác, có cùng tỷ lệ theo từng cặp, và nếu tỉ lệ giữa chúng là chéo cặp, thì khi so sánh bắc cầu chúng cũng có cùng tỷ lệ.



A, B và C là ba đại lượng, và D, E, F là các đại lượng khác với cùng số lượng, từng cặp một có tỷ lệ bằng nhau. Và có tỷ lệ giữa chúng là chéo cặp, tức là tỉ lệ của A và B bằng tỉ

lệ của E và F, và tỉ lệ của B và C bằng tỉ lệ của D và E. Và khi so sánh bắc cầu, giả sử A lớn hơn C. Có thể phát biểu rằng tỷ lệ của A và C bằng tỷ lệ của D và F.

Gọi G, H và K lần lượt là bội số có cùng nhân tử của A, B và D, và L, M, N lần lượt là các bội số có cùng nhân tử tùy ý khác của C, E và F.

Vì G và H là bội số có cùng nhân tử của A và B theo thứ tự đó, và vì các hợp phần có cùng tỷ lệ với nhau như các bội số tương ứng [MĐ 5.15], cho nên tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của G và H. Và với cùng lý do đó, tỷ lệ của E và F bằng tỷ lệ của M và N. Và tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của E và F [MĐ 5.11]. Và vì tỷ lệ của B và C bằng tỷ lệ của D và E, cho nên đảo lại thì tỷ lệ của B và D cũng bằng tỷ lệ của C và E [MĐ 5.16].

Vì H và K là bội số có cùng nhân tử của B và D theo thứ tự đó, và vì các hợp phần có cùng tỷ lệ với nhau như các bội số tương ứng [MĐ 5.15], cho nên tỷ lệ của B và D bằng tỷ lệ của H và K. Nhưng tỷ lệ của B và D bằng tỷ lệ của C và E. Vì vậy tỷ lệ của H và K cũng bằng tỷ lệ của C và E [MĐ 5.11].

Một lần nữa, vì L và M là bội số có cùng nhân tử của C và E, cho nên tỷ lệ của C và E bằng tỷ lệ của L và M [MĐ 5.15]. Nhưng tỷ lệ của C và E lại bằng tỷ lệ của H và K. Vì vậy,

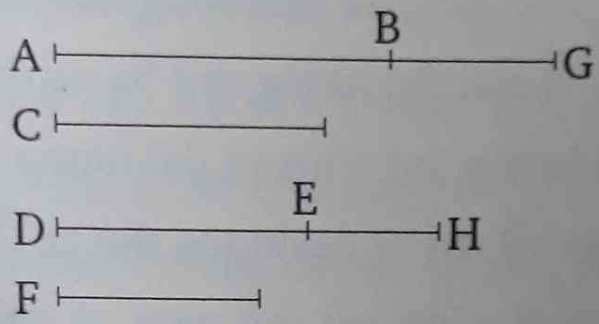
tỷ lệ của H và K bằng tỷ lệ của L và M [MĐ. 5.11]. Cũng thế, đảo lại thì tỷ lệ của H và L bằng tỷ lệ của K và M [MĐ 5.16].

Và cũng đã chứng minh được rằng tỷ lệ của G và H bằng tỷ lệ của M và N. Như vậy, vì G, H và L là ba đại lượng, K, M và N là các đại lượng khác có cùng số lượng, có cùng tỷ lệ theo từng cặp, và tỷ lệ của chúng là chéo cặp, cho nên khi so sánh bắc cầu, nếu G lớn hơn L thì K cũng lớn hơn N, và nếu G bằng L thì K cũng bằng N, và nếu G nhỏ hơn L thì K cũng nhỏ hơn N [MĐ 5.21]. G và K là các bội số có cùng nhân tử của A và D theo thứ tự đó, và L và N là các bội số có cùng nhân tử của C và F theo thứ tự đó. Như vậy, tỷ lệ của A và C bằng tỷ lệ của D và F [ĐN 5.5]

Như vậy, nếu cho ba đại lượng, và cùng một số lượng ấy các đại lượng khác, có cùng tỷ lệ theo từng cặp, và nếu tỉ lệ giữa chúng là chéo cặp, thì khi so sánh bắc cầu chúng cũng có cùng tỷ lệ. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 24:</u> Nếu tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai bằng tỷ lệ của đại lượng thứ ba và đại lượng thứ tư, và tỷ lệ của đại lượng thứ năm và đại lượng thứ hai bằng tỷ lệ của đại lượng thứ sáu và đại lượng thứ tư thì tỷ lệ của tổng đại lượng thứ nhất cộng với thứ năm và đại lượng

thứ hai cũng sẽ bằng tỷ lệ của tổng đại lượng thứ ba cộng với thứ sáu và đại lượng thứ tư.



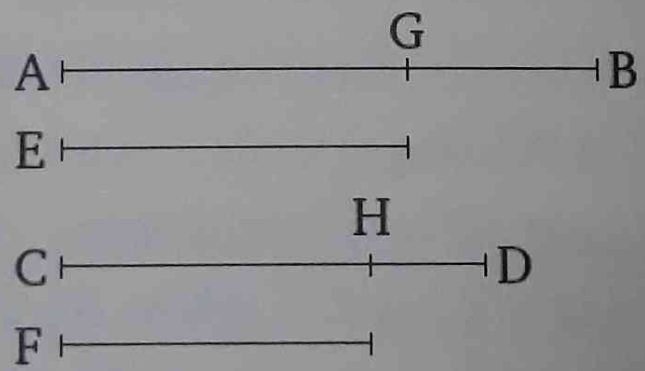
Cho đại lượng thứ nhất AB có tỷ lệ với đại lượng thứ hai C bằng với tỷ lệ của đại lượng thứ ba DE với đại lượng thứ tư F. Và cho đại lượng thứ năm BG có tỷ lệ với đại lượng thứ hai C cũng bằng tỷ lệ của đại lượng thứ sáu EH với đại lượng thứ tư F. Có thể phát biểu rằng tỷ lệ của tổng đại lượng thứ nhất cộng với đại lượng thứ năm AG và đại lượng thứ hai C cũng bằng tỷ lệ của tổng đại lương thứ ba cộng với đại lượng thứ sáu DH và đại lượng thứ tư F.

Vì tỷ lệ của BG và C bằng tỷ lệ của EH và F, nên đảo lại thì tỷ lệ của C và BG bằng tỷ lệ của F và EH [MĐ 5.7 corr.]. Như vậy, vì tỷ ệ của AB và C bằng tỷ lệ của DE và F, và tỷ lệ của C và BG bằng tỷ lệ của F và EH, do đó, khi so sánh bắc cầu, tỷ lệ của AB và BG bằng tỷ lệ của DE và EH [MĐ 5.22]. Và nếu các đại lượng riêng rẽ là tỷ lệ thì chúng cũng tỷ lệ khi cộng lại [MĐ 5.18]. Cho nên, tỷ lệ của AG và GB bằng tỷe lệ của DH và HE. Cũng vậy, tỷ lệ của BG và C bằng tỷ lệ của EH

và F. Do đó, khi so sánh bắc cầu, tỷ lệ của AG và C bằng tỷ lệ của DH và F [MĐ 5.22].

Như vậy, nếu tỷ lệ của đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai bằng tỷ lệ của đại lượng thứ ba và đại lượng thứ tư, và tỷ lệ của đại lượng thứ năm và đại lượng thứ hai bằng tỷ lệ của đại lượng thứ sáu và đại lượng thứ tư thì tỷ lệ của tổng đại lượng thứ nhất cộng với thứ năm và đại lượng thứ hai cũng sẽ bằng tỷ lệ của tổng đại lượng thứ ba cộng với thứ sáu và đại lượng thứ tư. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 25:</u> Nếu bốn đại lượng là tỷ lệ thì tổng của đại lượng lớn nhất và đại lượng nhỏ nhất lớn hơn tổng của các đại lượng còn lại.



Có AB, CD, E và F là bốn đại lượng tỷ lệ thuận, tức là tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của E và F. Có AB là đại lượng lớn

nhất của chúng và F là đại lượng nhỏ nhất. Có thể phát biểu rằng tổng AB cộng F lớn hơn tổng CD cộng E.

Lấy AG bằng với E, và CH bằng với F.

Từ đó, vì tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của E và F, và E bằng AG, F bằng CH, do đó tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của AG và CH. Và bởi vì tỷ lệ của đại lượng tổng AB và đại lượng tổng CD bằng tỷ lệ của phần được lấy đi AG và phần được lấy đi CH cho nên tỷ lệ của phần còn lại GB và phần còn lại HD cũng bằng tỷ lệ của AB và CD [MĐ 5.19]. Mà AB lớn hơn CD. Nên GB cũng lớn hơn HD. Và vì AG bằng E, CH bằng F cho nên tổng AG cộng F bằng tổng CH cộng E. Nếu cộng các đại lượng bằng nhau vào các đại lượng không bằng nhau sẽ được các đại lượng tổng không bằng nhau, như vậy, nếu AB và F được cộng vào GB và CH và E được cộng vào HD – GB và HD là không bằng nhau và GB lớn hơn – tức là AB cộng F lớn hơn CD cộng E.

Như vậy, nếu bốn đại lượng là tỷ lệ thì tổng của đại lượng lớn nhất và đại lượng nhỏ nhất lớn hơn tổng của các đại lượng còn lại. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Quyển 6

HÌNH ĐỒNG DẠNG

Định nghĩa

1. Các hình thẳng đồng dạng là những hình có các góc bằng nhau riêng rẽ và các cạnh tạo nên các góc bằng nhau tương ứng đó là tỷ lệ.

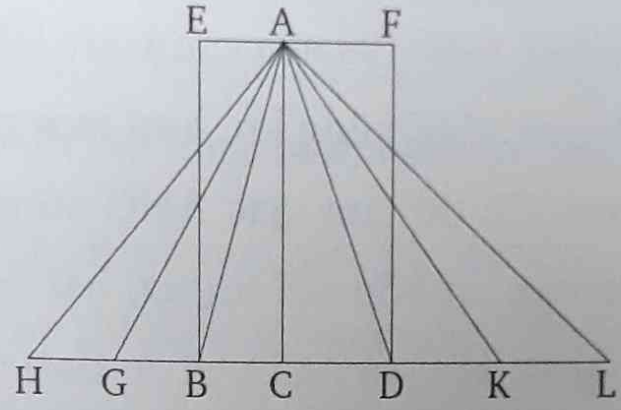
2. Một đường thẳng gọi là được chia theo trung và và ngoại tỷ khi tỷ lệ của toàn phần và phân đoạn lớn bằng tỷ lệ của phân đoạn lớn và phân đoạn nhỏ.[01]

3. Chiều cao của một hình bất kỳ là đoạn thẳng được kẻ từ đỉnh và vuông góc với đáy.

---

01 Bốn số hạng hay đại lượng a, b, c và d được coi là có tỷ lệ trung và ngoại tỷ khi a/b = c/d, tức là ad = bc. (ND)

Mệnh đề 1[02]**: Các hình tam giác và các hình bình hành mà có cùng chiều cao thì có tỷ lệ bằng với tỷ lệ của các cạnh đáy của chúng.**



Cho các tam giác ABC và ACD, và các hình bình hành EC và CF, đều chung chiều cao AC. Có thể phát biểu rằng tỷ lệ của đáy BC và đáy CD bằng tỷ lệ của tam giác ABC với tam giác ACD, và bằng tỷ lệ của hình bình hành EC và hình bình hành CF.

Kéo dài BD theo mỗi hướng tới H và L, và cho một số tùy ý các đoạn thẳng bất kỳ BG và GH bằng với đáy BC, và một số tùy ý các đoạn DK và KL bằng với đáy CD. Nối các đoạn AG, AH, AK và AL.

Và vì CB, BG và GH bằng nhau nên các tam giác AHG, AGB, ABC cũng bằng nhau [MĐ.1.38]. Do đó, HC gấp BC

---

02 Như đã được chứng minh một cách đơn giản, mệnh đề này đúng ngay cả khi các tam giác, hay các hình bình hành, không có cạnh chung và không có góc vuông.

bao nhiêu lần thì tam giác AHC cũng gấp tam giác ABC bấy nhiêu lần. Vậy, cùng lý do đó, đáy LC gấp bao nhiêu lần đáy CD thì tam giác ALC cũng gấp bấy nhiêu lần tam giác ACD. Và nếu đáy HC bằng đáy CL thì tam giác AHC cũng bằng tam giác ACL [MĐ. 1.38]. Và nếu cạnh đáy HC lớn hơn cạnh đáy CL thì tam giác AHC cũng lớn hơn tam giác ACL03 . Và nếu HC nhỏ hơn CL thì tam giác AHC cũng nhỏ hơn tam giác ACL. Như vậy, có bốn đại lượng, hai cạnh đáy BC và CD, và hai tam giác ABC và ACD, từ đó tính được các bội số có cùng nhân tử của đáy BC và tam giá ABC, là đáy HC và tam giác AHC, và của đáy CD và tam giác ADC, gọi là đáy LC và tam giác ALC. Và cũng đã chứng minh được rằng nếu như HC lớn hơn CL thì tam giác AHC cũng lớn hơn tam giác ALC, nếu HC bằng LC thì tam giác AHC cũng bằng ALC, và nếu như HC nhỏ hơn CL thì tam giác AHC cũng sẽ nhỏ hơn ALC. Do đó, tỷ lệ của đáy BC và đáy CD bằng tỷ lệ của tam giác ABC và tam giác ACD [ĐN. 5.5].

Và vì hình bình hành EC gấp đôi tam giác ABC, và hình bình hành FC gấp đôi tam giác ACD [MĐ. 1.34], mà các cấu phần thì có chung tỷ lệ với nhau giống như các bội số cùng nhân tử của chúng [MĐ. 5.15], do đó tỷ lệ của tam giác ABC và tam giác ACD bằng tỷ lệ của hình bình hành EC và

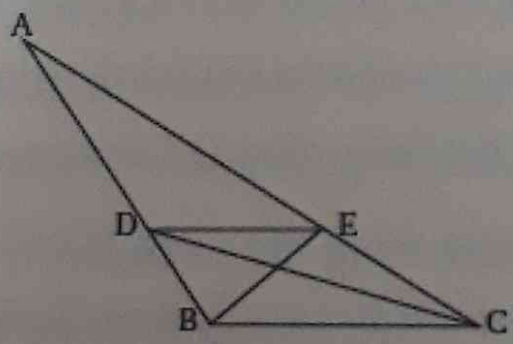
---

03 Phát biểu này được tổng quát hóa trực tiếp từ MĐ 1.38.

hình bình hành FC. Thực tế thì, vì tỷ lệ của cạnh đáy BC và cạnh đáy CD đã được chứng minh là bằng tỷ lệ của tam giác ABC và tam giác ACD, mà tỷ lệ của tam giác ABC và tam giác ACD lại bằng tỷ lệ của hình bình hành EC và hình bình hành CF, cho nên, tỷ lệ của BC và CD cũng bằng tỷ lệ của hình bình hành EC và hình bình hành FC [MĐ. 5.11].

Như vậy, các hình tam giác và các hình bình hành mà có cùng chiều cao thì có tỷ lệ bằng với tỷ lệ của các cạnh đáy của chúng. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 2:</u> Nếu một đường thẳng bất kỳ được kẻ song song với một trong các cạnh của một tam giác thì nó sẽ cắt các cạnh kia của tam giác theo tỷ lệ. Và nếu hai cạnh của tam giác bị cắt theo tỷ lệ thì đường thẳng nối các giao điểm sẽ song song với cạnh còn lại của tam giác.



Kẻ DE song song với một trong các cạnh của tam giác ABC là BC. Có thể phát biểu rằng tỷ lệ của BD và DA bằng

tỷ lệ của CE và AE.

Nối các đoạn BE và CD.

Theo đó, tam giác BDE bằng tam giác CDE. Vì chúng có đáy chung DE, và cùng nằm giữa hai đoạn thẳng song song DE và BC [MĐ. 1.38]. Và ADE là một tam giác bất kỳ khác. Hơn nữa, các đại lượng bằng nhau có chung tỷ lệ với cùng một đại lượng khác [MĐ. 5.7]. Do đó, tỷ lệ của tam giác BDE và ADE bằng tỷ lệ của tam giác CDE và ADE. Nhưng tỷ lệ của tam giác BDE và tam giác ADE lại bằng tỷ lệ của BD và DA. Bởi vì chúng đều có chung chiều cao - cụ thể là đoạn thẳng được kẻ từ E và vuông góc với AB – nên tỷ lệ của hình này và hình kia cũng bằng tỷ lệ của các cạnh đáy của chúng [MĐ. 6.1]. Vậy, cũng cùng lý do đó, tỷ lệ của tam giác CDE và tam giác ADE bằng tỷ lệ của CE và EA. Và theo đó, tỷ lệ của BD và DA bằng tỷ lệ của CE và EA [MĐ. 5.11].

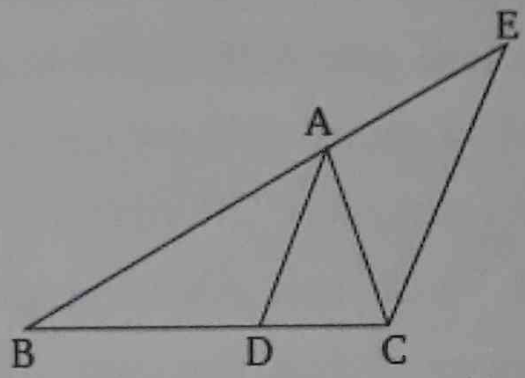
Bây giờ, hãy cho các cạnh AB và AC của tam giác ABC bị cắt sao cho tỷ lệ của BD và DA bằng tỷ lệ CE và EA. Và nối D với E. Có thể phát biểu rằng DE song song với BC.

Với cùng cách dựng như trên, có tỷ lệ của BD và DA bằng tỷ lệ của CE và EA, nhưng tỷ lệ của BD và DA lại bằng tỷ lệ của tam giác BDE và ADE, và tỷ lệ của CE và EA bằng tỷ lệ của tam giác CDE và tam giác ADE [MĐ. 6.1], cho nên,

tỷ lệ của tam giác BDE và tam giác ADE cũng bằng tỷ lệ của tam giác CDE và tam giác ADE [MĐ. 5.11]. Vậy, các tam giác BDE và CDE có chung tỷ lệ với tam giác ADE. Do đó, tam giác BDE bằng tam giác CDE [MĐ. 5.9]. Hơn nữa chúng có đáy chung DE. Và các tam giác bằng nhau mà cùng một cạnh đáy thì chúng cũng cùng nằm giữa các đoạn thẳng song song [MĐ. 1.39]. Do đó, DE song song với BC

Như vậy, nếu một đường thẳng bất kỳ được kẻ song song với một trong các cạnh của một tam giác thì nó sẽ cắt các cạnh kia của tam giác theo tỷ lệ. Và nếu hai cạnh của tam giác bị cắt theo tỷ lệ thì đường thẳng nối các giao điểm sẽ song song với cạnh còn lại của tam giác. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 3:</u> Nếu chia đôi một góc của một tam giác, và đường thẳng chia góc này cũng cắt cạnh đáy thì tỷ lệ giữa các phân đoạn của cạnh đáy sẽ bằng tỷ lệ của các cạnh còn lại của tam giác. Và nếu các phân đoạn của cạnh đáy có tỷ lệ bằng với tỷ lệ giữa các cạnh còn lại của tam giác thì đoạn thẳng nối đỉnh tam giác và điểm phân chia sẽ chia đôi góc của tam giác.



Cho tam giác ABC. Và góc BAC được chia đôi bởi đoạn thẳng AD. Có thể phát biểu rằng tỷ lệ của BD và CD bằng tỷ lệ của BA và AC.

Dựng đoạn CE qua C song song với DA. Và kéo dài BA cắt CE tại điểm E[04].

Vì đoạn thẳng AC cắt các đoạn thẳng song song AD và EC cho nên góc ACE bằng với góc CAD [MĐ. 1.29]. Nhưng theo giả thiết thì góc CAD bằng với góc BAD. Do đó, góc BAD cũng bằng góc ACE. Tiếp theo, vì đoạn BAE cắt các đường thẳng song song AD và EC nên góc ngoài BAD bằng góc trong AEC [MĐ. 1.29]. Và góc ACE đã được chứng minh là bằng góc BAD. Như vậy, góc ACE cũng bằng góc AEC. Và do đó, cạnh AE bằng cạnh AC [MĐ. 1.6]. Vì AD được kẻ song song với một trong các cạnh của tam giác BCE là EC nên xét về tỷ lệ thì tỷ lệ của BD và DC bằng tỷ lệ của BA và

---

04 Việc hai đường thẳng sẽ cắt nhau là hợp lý bởi vì tổng các góc ACE và CAE nhỏ hơn hai góc vuông, như đã được chứng minh một cách đơn giản.

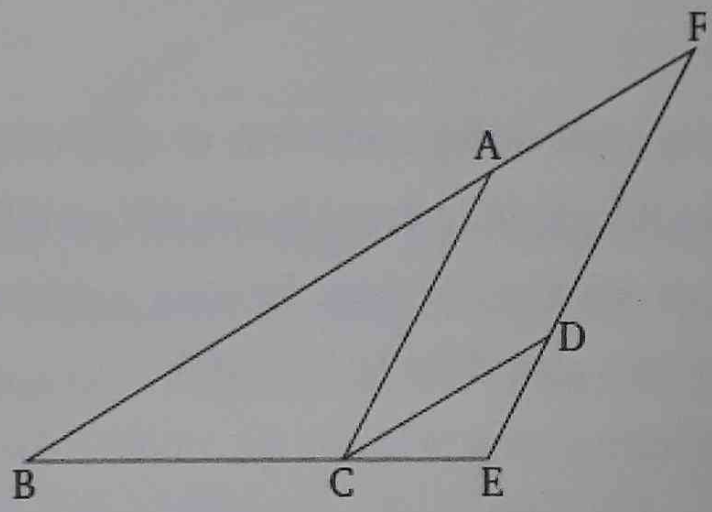
AE [MĐ. 6.2]. Hơn nữa AE bằng AC. Vậy, tỷ lệ của BD và DC bằng tỷ lệ của BA và AC.

Bây giờ, cho tỷ lệ của BD và DC bằng tỷ lệ của BA và AC. Nối A với D. Có thể phát biểu rằng đoạn thẳng AD chia đôi góc BAC.

Với cùng cách dựng như trên, vì tỷ lệ của BD và DC bằng tỷ lệ của BA và AC, nên tỷ lệ của BD và DC cũng bằng tỷ lệ của BA và AE. Do AD được kẻ song song với một trong các cạnh của tam giác BCE là EC [MĐ. 6.2]. Cho nên, tỷ lệ của BA và AC cũng bằng tỷ lệ của BA và AE [MĐ. 5.11]. Như vậy, AC bằng AE [MĐ. 5.9]. Và do đó, góc AEC bằng góc ACE [MĐ. 1.5]. Nhưng góc AEC lại bằng góc ngoài BAD và hơn nữa góc ACE bằng góc so le CAD [MĐ. 1.29]. Từ đó, góc BAD cũng bằng góc CAD. Như vậy đoạn AD chia đôi góc BAC.

Vậy, nếu chia đôi một góc của một tam giác, và đường thẳng chia góc này cũng cắt cạnh đáy thì tỷ lệ giữa các phân đoạn của cạnh đáy sẽ bằng tỷ lệ của các cạnh còn lại của tam giác. Và nếu các phân đoạn của cạnh đáy có tỷ lệ bằng với tỷ lệ giữa các cạnh còn lại của tam giác thì đoạn thẳng nối đỉnh tam giác và điểm phân chia sẽ chia đôi góc của tam giác. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 4:</u> Với các tam giác đẳng giác với nhau, các cạnh bên các góc bằng nhau thì tỷ lệ, và các cạnh đối diện với các góc bằng nhau này cũng tỷ lệ tương ứng.



Cho ABC và DCE là các tam giác đẳng giác, có góc ABC bằng góc DCE, góc BAC bằng CDE, và ACB bằng CED. Có thể phát biểu rằng trong các tam giác ABC và DCE, các cạnh bên các góc bằng nhau thì tỷ lệ, và các cạnh đối diện với các góc bằng nhau này cũng tỷ lệ tương ứng.

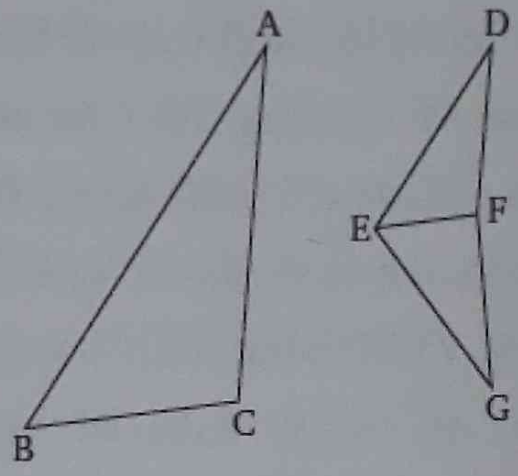
Đặt BC thẳng hàng với CE. Vì tổng các góc ABC và ACB nhỏ hơn hai góc vuông [MĐ. 1.17], và vì ACB bằng DEC, cho nên tổng ABC và DEC nhỏ hơn hai góc vuông. Như vậy, BA và ED kéo dài sẽ gặp nhau [TĐ. 5]. Kéo dài và cho chúng gặp nhau tại điểm F.

Và vì góc DCE bằng góc ABC nên BF song song với

CD [MĐ. 1.28]. Tiếp theo, vì góc ACB bằng góc DEC nên AC song song với FE [MĐ. 1.28]. Do đó, FACD là một hình bình hành. Vậy FA bằng DC, và AC bằng FD [MĐ. 1.34]. Và vì AC được kẻ song song với một trong các cạnh của tam giác FBE là FE cho nên tỷ lệ của BA và AF bằng tỷ lệ của BC và CE [MĐ. 6.2]. Và AF lại bằng CD. Cho nên tỷ lệ của BA và CD bằng tỷ lệ của BC và CE [MĐ. 5.16]. Tiếp theo, vì CD song song với BF cho nên tỷ lệ của BC và CE bằng tỷ lệ của FD và DE [MĐ. 6.2]. Và FD bằng AC. Cho nên, tỷ lệ của BC và CE bằng tỷ lệ của AC và DE, và đảo lại thì tỷ lệ của BC và CA bằng tỷ lệ của CE và ED [MĐ. 6.2]. Theo đó, vì tỷ lệ của AB và BC đã được chứng minh là bằng với tỷ lệ của DC và CE, và tỷ lệ BC và CA bằng tỷ lệ của CE và ED, cho nên, theo tính chất bắc cầu thì tỷ lệ của BA và AC bằng tỷ lệ của CD và DE [MĐ. 5.22]

Vậy, với các tam giác đẳng giác với nhau, các cạnh bên các góc bằng nhau thì tỷ lệ, và các cạnh đối diện với các góc bằng nhau này cũng tỷ lệ tương ứng. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 5:</u> Nếu hai tam giác có các cạnh tỷ lệ thì chúng sẽ đẳng giác với nhau, và sẽ có các góc tương ứng với các cạnh đối diện là bằng nhau.



Gọi ABC và DEF là hai tam giác có các cạnh tỷ lệ, sao cho tỷ lệ của AB và BC bằng tỷ lệ của DE và EF, tỷ lệ của BC và CA bằng EF và FD, hơn nữa, tỷ lệ của BA và AC bằng ED và DF. Có thể phát biểu rằng tam giác ABC là đẳng giác với tam giác DEF, và chúng sẽ có các góc bằng nhau tương ưng với các cạnh đối diện. Tức là, góc ABC bằng góc DEF, góc BCA bằng góc EFD, và góc BAC bằng góc EDF.

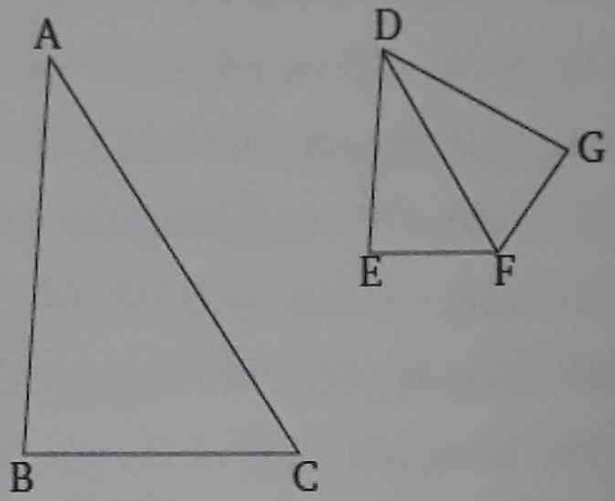
Tại các điểm E và F trên đoạn thẳng EF, lần lượt dựng góc FEG bằng với góc ABC, và góc EFG bằng góc ACB [MĐ. 1.23]. Như vậy, góc (còn lại) A bằng góc (còn lại) G [MĐ. 1.32].

Theo đó, tam giác ABC là đẳng giác với tam giác EGF.

Cho nên, trong các tam giác ABC và EGF, các cạnh bên của các góc bằng nhau thì tỷ lệ, và các cạnh đối diện với các góc bằng nhau là cũng tỷ lệ tương ứng [MĐ. 6.4]. Vậy, tỷ lệ của AB và BC bằng tỷ lệ của GE và EF. Nhưng theo giả thiết thì tỷ lệ của AB và BC bằng tỷ lệ của DE và EF. Do đó, tỷ lệ của DE và EF bằng tỷ lệ của GE và EF [MĐ. 5.11]. Khi đó, DE và GE đều có cùng tỷ lệ với EF. Cho nên DE bằng GE [MĐ. 5.9]. Với cùng lý dó đó, DF cũng bằng GF. Như vậy, vì DE bằng EG và EF là chung nên hai cạnh DE, EF (lần lượt) bằng GE, EF. Và đáy DF bằng đáy FG. Như vậy, góc DEF bằng GEF [MĐ. 1.8], góc DEF bằng góc GEF, và các góc còn lại đối diện với các cạnh bằng nhau thì bằng nhau [MĐ. 1.4]. Do đó, góc DFE cũng bằng góc GFE, và góc EDF bằng EGF. Và vì góc FED bằng góc GEF, góc GEF lại bằng góc ABC, nên góc ABC do đó cũng bằng góc DEF. Như vậy, với cùng lý do đó, góc ACB cũng bằng góc DFE, và hơn nữa góc A bằng góc D. Do đó, tam giác ABC là đẳng giác với tam giác DEF.

Như vậy, nếu hai tam giác có các cạnh tỷ lệ thì chúng sẽ đẳng giác với nhau, và sẽ có các góc tương ứng với các cạnh đối diện là bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 6:</u> Nếu hai tam giác có một góc của tam bằng một góc của tam giác kia, và các cạnh bên của các góc này là tỷ lệ, thì các tam giác sẽ là đẳng giác, và chúng sẽ có các góc tương ứng với các cạnh đối diện là bằng nhau.



Gọi ABC và DEF là hai tam giác có một góc của tam giác này, là góc BAC, bằng với góc của tam giác kia, là góc EDF, theo thứ tự đó, và các cạnh bên của các góc bằng nhau đó là tỷ lệ, tức là tỷ lệ của BA và AC bằng tỷ lệ của ED và DF. Có thể phát biểu rằng tam giác ABC là đẳng giác với tam giác AEF, và chúng có góc ABC bằng góc DEF, ACB bằng DFE.

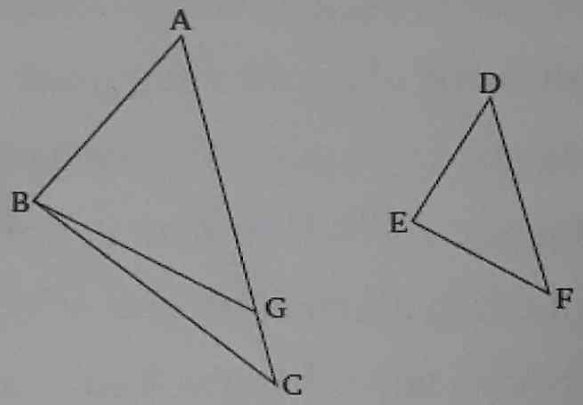
Tại các điểm D và F trên đoạn thẳng DF, lần lượt dựng góc FDG bằng với các góc BAC và EDF, và góc DFG bằng góc ACB [MĐ. 1.23]. Như vậy, góc (còn lại) B bằng góc (còn lại) G [MĐ. 1.32]

Do đó, tam giác ABC là đẳng giác với tam giác DGF.

Cho nên, xét về tỷ lệ thì tỷ lệ của BA và AC bằng tỷ lệ của GD và DF [MĐ. 6.4]. Và theo giả thiết thì tỷ lệ của BA và AC cũng bằng tỷ lệ ED và DF. Như vậy, tỷ lệ của ED và DF bằng tỷ lệ của GD và DF [MĐ. 5.11]. Cho nên, ED bằng DG [MĐ. 5.9]. Mà DF là chung. Vậy hai cạnh ED, DF lần lượt bằng GD, DF. Và góc EDF bằng góc GDF. Do đó, đáy EF bằng đáy GF, tam giác DEF bằng tam giác GDF, và các góc còn lại đối diện với các cạnh bằng nhau thì bằng nhau [MĐ. 1.4]. Do đó, góc DFG bằng góc DFE, góc DGF bằng góc DEF. Nhưng góc DFG lại bằng góc ACB. Cho nên, góc ACB cũng bằng góc DFE. Hơn nữa theo giả thiết thì góc ACB cũng bằng góc EDF. Do đó, góc (còn lại) B bằng với góc (còn lại) E [MĐ. 1.32]. Như vậy, tam giác ABC là đẳng giác với tam giác DEF.

Như vậy, nếu hai tam giác có một góc của tam bằng một góc của tam giác kia, và các cạnh bên của các góc này là tỷ lệ, thì các tam giác sẽ là đẳng giác, và chúng sẽ có các góc tương ứng với các cạnh đối diện là bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 7:</u> Nếu hai tam giác có một góc của tam giác này bằng một góc của tam giác kia, và các cạnh bên của các góc khác là tỷ lệ, và các góc còn lại hoặc đều cùng nhỏ hơn hoặc cùng không nhỏ hơn góc vuông, thì các tam giác sẽ là đẳng giác, và các góc ứng với các cạnh bên tỷ lệ là bằng nhau.



Cho ABC và DFE là hai tam giác có một góc của tam giác này, là BAC, bằng một góc của tam giá kia, là EDF, theo thứ tự đó, và các cạnh bên của các góc khác, lần lượt là ABC và DEF, thì tỷ lệ với nhau, tức là tỷ lệ của AB và BC bằng tỷ lệ của DE và EF, các góc còn lại tại C và F thì trước tiên cho là nhỏ hơn góc vuông. Có thể phát biểu rằng tam giác ABC đẳng giác với tam giác DEF, góc ABC bằng góc DEF, và góc còn lại tại C thì hiển nhiên là bằng góc còn lại tại F.

Nếu tam giác ABC không bằng tam giác DEF thì một trong chúng phải lớn hơn. Giả sử ABC lớn hơn. Tại điểm B

trên đoạn thẳng AB, dựng góc ABG bằng góc DEF [MĐ.1.23]

Vì góc A bằng góc D, góc ABG bằng DEF, cho nên góc còn lại AGB cũng bằng với góc còn lại DFE [MĐ. 1.32]. Vậy, tam giác ABG đẳng giác với tam giác DEF. Do đó, tỷ lệ của AB và BG bằng tỷ lệ của DE và EF [MĐ. 6.4]. Và theo giả thiết thì tỷ lệ của DE và EF bằng tỷ lệ của AB và BC. Do đó, AB có cùng tỷ lệ với BC và BG [MĐ. 5.11]. Vậy, BC bằng BG [MĐ. 5.9]. Và như vậy thì góc C bằng góc BGC [MĐ. 1.5]. Hơn nữa, theo giả thiết thì góc tại C lại nhỏ hơn một góc vuông. Do đó, góc BGC cũng nhỏ hơn một góc vuông. Vậy nên góc kề với nó, tức là góc AGB, là lớn hơn một góc vuông [MĐ. 1.13]. AGB đã được chứng minh là bằng góc tại F. Như vậy, góc tại F cũng lớn hơn một góc vuông. Nhưng theo giả thiết thì nó nhỏ hơn một góc vuông. Điều này là vô lý. Vậy, góc ABC không thể không bằng góc DEF. Tức là bằng. Và góc A cũng bằng góc D. Do đó góc C còn lại cũng bằng góc F còn lại [MĐ. 1.32]. Như vậy, tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF.

Tiếp tục giả thiết rằng các góc tại C và F không nhỏ hơn một góc vuông. Một lần nữa có thể phát biểu rằng tam giác ABC là đẳng giác với tam giác DEF cả trong trường hợp này.

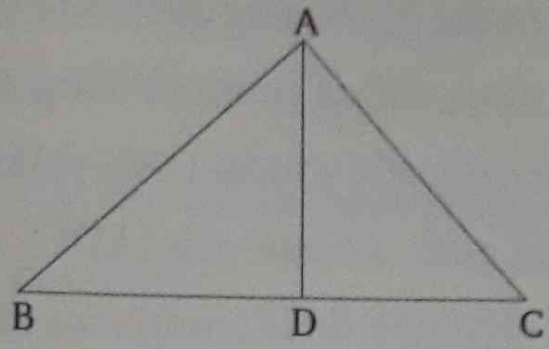
Tương tự, với cùng cách dựng đó, có thể chứng minh BC bằng BG. Do đó, góc tại C cũng bằng góc BGC. Và góc

tại C lại không nhỏ hơn một góc vuông. Khi đó, góc BGC cũng không nhỏ hơn một góc vuông. Vậy, trong tam giác BGC, tổng hai góc không nhỏ hơn hai góc vuông. Điều này là không thể [MĐ. 1.17]. Cho nên góc ABC không thể không bằng DEF. Tức là bằng. Và góc A cũng bằng góc D. Do đó, góc (còn lại) C bằng góc (còn lại) F [MĐ. 1.32]. Như vậy, tam giác ABC đẳng giác với tam giác DEF.

Như vậy, nếu hai tam giác có một góc của tam giác này bằng một góc của tam giác kia, và các cạnh bên của các góc khác là tỷ lệ, và các góc còn lại hoặc đều cùng nhỏ hơn hoặc cùng không nhỏ hơn góc vuông, thì các tam giác sẽ là đẳng giác, và các góc ứng với các cạnh bên tỷ lệ là bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 8: Trong một tam giác vuông, nếu từ góc vuông vẽ một đường thẳng vuông góc với cạnh đáy thì các tam giác nằm ở hai bên đường vuông góc đó là đồng dạng với tam giác ban đầu và chúng đồng dạng với nhau.

Cho tam giác vuông ABC có góc BAC là góc vuông, và từ A vẽ đoạn AD vuông góc với BC [MĐ. 1.12]. Có thể phát biểu rằng mỗi tam giác ABD và ADC là đồng dạng với tam giác ABC, và hơn nữa các tam giác này đồng dạng với nhau.



Vì góc BAC bằng góc ADB – do đều là góc vuông – và góc B là chung cho cả hai tam giác ABC và ABD cho nên góc còn lại ACB bằng với góc còn lại BAD [MĐ.1.32]. Do đó, tam giác ABC là đẳng giác với tam giác ABD. Vậy tỷ lệ của BC, là cạnh đối diện với góc vuông trong tam giác ABC, và BA là cạnh đối diện với góc vuông trong tam giác ABD bằng tỷ lệ của cũng cạnh AB, là cạnh đối diện với góc C trong tam giác ABC và cạnh BD, là cạnh đối diện với góc BAD trong tam giác ABD, và hơn thế nữa, cũng bằng tỷ lệ của AC và AD, đều đối diện với góc B chung của hai tam giác đó) [MĐ. 6.4]. Như vậy, tam giác ABC là đẳng giác với tam giác ABD, và các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ. Do đó, tam giác ABC đồng dạng với tam giác ABD [ĐN. 6.1]. Tương tự, có thể chứng minh rằng tam giác ADC cũng đồng dạng với tam giác ABC. Vậy, các tam giác ABD và ADC đều đồng dạng với tam giác ABC.

Cũng phát biểu rằng các tam giác ABD và ADC đồng dạng với nhau.

Bởi vì góc vuông BDA bằng góc vuông ADC, và thực tế thì góc BAD đã được chứng minh là bằng góc C, do đó góc còn lại tại B cũng bằng góc còn lại DAC [MĐ. 1.32]. Vậy, tam giác ABD là đẳng giác với tam giác ADC. Do đó, tỷ lệ của BD, là cạnh đối diện góc BAD trong tam giác ABD, và DA, là cạnh đối diện góc C trong tam giác ADB, là góc cũng bằng góc BAD, bằng với tỷ lệ của cũng cạnh AD, là cạnh đối diện với góc B trong tam giác ABD, và DC, là cạnh đối diện với góc DAC trong tam giác ADC, là góc cũng bằng góc tại B, và hơn thế nữa, cũng bằng với tỷ lệ của BA và AC, đều đối diện với các góc vuông [MĐ. 6.4]. Do đó, tam giác ABD đồng dạng với tam giác ADC [MĐ. 6.1].

Như vậy, trong một tam giác vuông, nếu từ góc vuông vẽ một đoạn thẳng vuông góc với cạnh đáy thì các tam giác nằm ở hai bên đường vuông góc đó là đồng dạng với tam giác ban đầu và chúng đồng dạng với nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Hệ quả

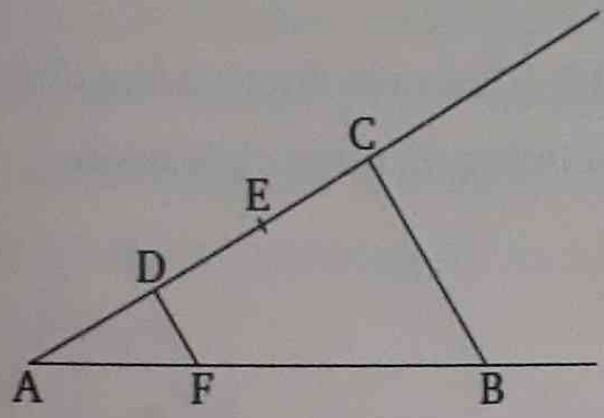
Từ mệnh đề trên, rõ ràng là trong một tam giác vuông, nếu kẻ một đoạn thẳng từ đỉnh góc vuông và vuông góc với cạnh đáy thì đoạn thẳng vừa kẻ sẽ tạo trung tỷ[05] với các phân

---

05 Ba số hạng hay đại lượng a,b và c được xem là có trung tỷ với nhau khi a/b = b/c. (ND)

đoạn của cạnh đáy[06]. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 9:</u> Cắt một phần đoạn thẳng theo yêu cầu từ một đoạn thẳng cho trước.



Gọi AB là đoạn thẳng cho trước. Cần cắt một phần đoạn thẳng được yêu cầu từ đoạn AB.

Giả sử đoạn cần cắt theo yêu cầu là một phần ba. Từ điểm A vẽ đoạn thẳng AC tạo một góc ngẫu nhiên với AB. Chọn một điểm D tùy trên AC. Lấy các đoạn DE và EC bằng với AD [MĐ. 1.3]. Nối đoạn BC [MĐ. 1.31]. Rồi qua D vẽ đoạn DF song song với nó [MĐ. 1.31].

Theo đó, vì FD được vẽ song song với một trong các cạnh của tam giác ABC là BC, nên tỷ lệ của CD và DA bằng tỷ lệ của BF và FA [MĐ. 6.2]. Có CD gấp đôi DA. Do đó, BF

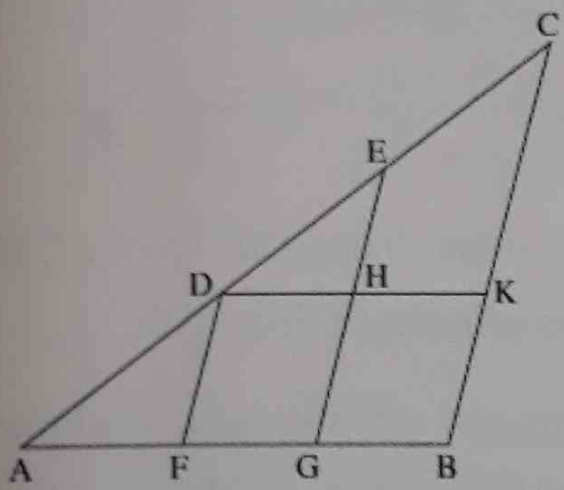
---

06 Nói cách khác, đường cao chính là trung bình nhân của các phân đoạn.

cũng gấp đôi FA. Như vậy, BA gấp ba lần AF.

Vậy, phần đoạn thẳng bằng một phần ba theo yêu cầu, là AF, đã được cắt ra từ một đoạn thẳng cho trước, là AB. Đó chính là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 10:</u> Chia một đoạn thẳng cho trước theo tỷ lệ của một đoạn thẳng đã được chia trước.



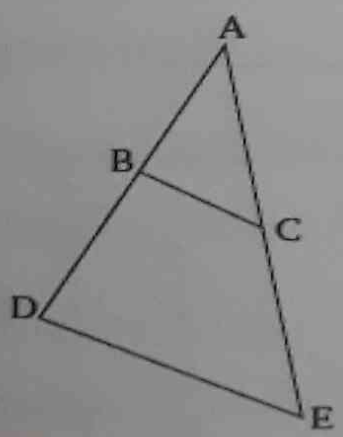
Gọi AB là đoạn thẳng cho trước, và AC là một đoạn thẳng đã được chia tại D và E, và đặt AC sao cho nó tạo với AB một góc ngẫu nhiên. Nối C với B. Từ D và E lần lượt kẻ các đoạn DF và EG song song với BC, rồi từ D kẻ DHK song song với AB [MĐ. 1.31]

Theo đó, FH và HB đều là các hình bình hành. Vậy, DH bằng FG, HK bằng GB [MĐ. 1.34]. Và vì đoạn thẳng HE

được kẻ song song với một trong các cạnh của tam giác DKC là HE, do đó xét về tỷ lệ thì tỷ lệ của CE và ED bằng tỷ lệ của KH và HD [MĐ. 6.2]. Hơn nữa, tỷ lệ của KH và BG bằng tỷ lệ của HD và GF. Do đó, tỷ lệ của CE và ED bằng tỷ lệ của BG và GF. Tiếp tục, vì FD được kẻ song song với một trong các cạnh của tam giác AGE là GE, do đó xét về tỷ lệ thì tỷ lệ của ED và DA bằng tỷ lệ của GF và FA [MĐ. 6.2]. Mà tỷ lệ của CE và ED đã được chứng minh là bằng tỷ lệ của BG và GF. Cho nên, tỷ lệ của CE và ED bằng BG và GF, và tỷ lệ của ED và DA bằng GF và FA.

Như vậy, đoạn thẳng cho trước, là AB, đã được chia theo tỷ lệ của một đoạn thẳng được chia trước. Đó là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 11:</u> Tìm một đoạn thẳng thứ ba tỷ lệ với hai đoạn thẳng cho trước.



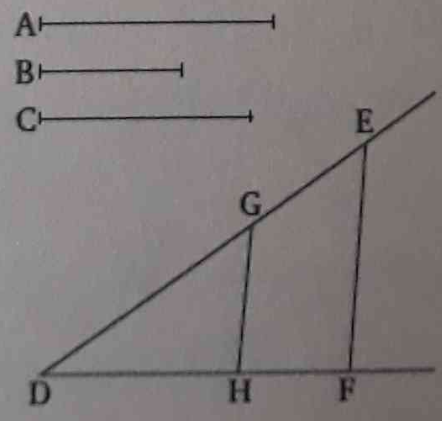
Cho trước hai đoạn thẳng BA và AC, và đặt sao cho tạo thành một góc ngẫu nhiên. Yêu cầu tìm một đoạn thẳng thứ ba tỷ lệ với BA và AC.

Lần lượt kéo dài BA và AC tới D và E, và cho BD bằng với AC [MĐ. 1.3]. Nối đoạn BC. Rồi từ D kẻ đoạn DE song song với nó [MĐ 1.31].

Theo đó, vì BC được kẻ song song với một trong các cạnh của tam giác ADE là DE, nên xét về tỷ lệ thì tỷ lệ của AB và BD bằng tỷ lệ của AC và CE [MĐ. 6.2]. Và BD bằng AC. Do đó, tỷ lệ của AB và AC bằng tỷ lệ của AC và CE.

Như vậy, đã tìm được đoạn thẳng thứ ba, là CE, tỷ lệ với hai đoạn cho trước là AB và AC. Đó là yêu cầu cần hoàn thành.

<u>Mệnh đề 12:</u> Tìm một đoạn thẳng thứ tư tỷ lệ với ba đoạn thẳng cho trước.



Gọi A, B, và C là ba đoạn thẳng cho trước. Yêu cầu tìm đoạn thẳng thứ tư tỷ lệ với A, B, và C.

Cho hai đoạn thẳng DE và DF tạo với nhau một góc ngẫu nhiên EDF. Và cho DG bằng với A, GE bằng với B, và ttiếp tục, DH bằng C [MĐ. 1.3]. Nối đoạn GH, rồi qua E kẻ đoạn EF song song với nó [MĐ. 1.31].

Theo đó, vì GH đã được kẻ song song với một trong các cạnh của tam giác DEF là EF, do đó tỷ lệ của DG và GE bằng tỷ lệ của DH và HF [MĐ. 6.2]. Hơn nữa, DG bằng A, GE bằng B, và DH bằng C. Như vậy, tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của C và HF.

Vậy, đoạn thẳng thứ tư, là HF, đã được dựng tỷ lệ với ba đoạn thẳng cho trước là A, B và C. Đó là yêu cầu cần hoàn thành.

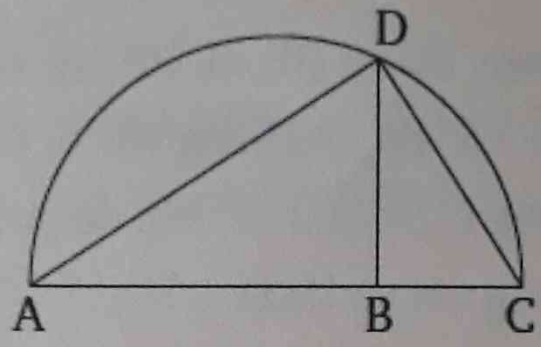
<u>Mệnh đề 13:</u> Tìm một đoạn thẳng tỷ lệ theo trung tỷ với hai đoạn thẳng cho trước[07].

Gọi AB và BC là hai đoạn thẳng đã biết. Tìm một đoạn thẳng tỷ lệ theo trung tỷ với AB và BC.

Đặt AB và BC thẳng hàng với nhau, và trên đoạn AC dựng nửa hình tròn ACD [MĐ. 1.10]. Từ điểm B kẻ đoạn BD

07 Nói cách khác, tìm trung bình nhân của hai đoạn thẳng cho trước.

vuông góc với AC [MĐ. 1.11]. Nối các đoạn AD và DC.



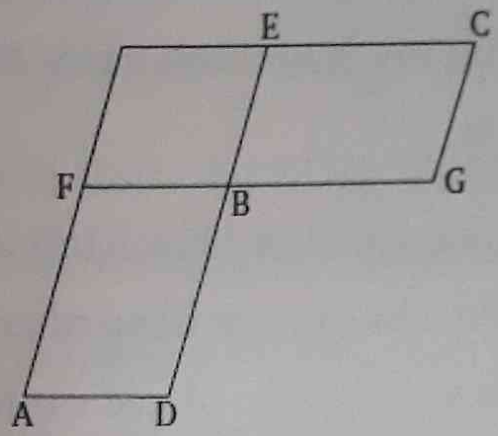
Vì ADC là góc nội tiếp chắn nửa hình tròn nên nó là một góc vuông [MĐ. 3.31]. Hơn nữa, trong tam giác vuông ADC, đoạn DB được kẻ từ góc vuông và vuông góc với cạnh đáy, do đó DB tỷ lệ theo trung tỷ với các phân đoạn của cạnh đáy [HQ. 6.8]

Như vậy, đã tìm được đoạn DB tỷ lệ theo trung tỷ với hai đoạn thẳng AB và BC cho trước. Đó là yêu cầu cần thực hiện.

<u>Mệnh đề 14:</u> Trong các hình bình hành đẳng giác và bằng nhau, các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo. Và các hình bình hành đẳng giác có các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo thì bằng nhau.

Cho AB và BC là các hình bình hành đẳng giác và bằng nhau có các góc tại B bằng nhau. Đặt các đoạn DB và BE

thẳng hàng [MĐ. 1.14]. Khi đó, FB và BG cũng thẳng hàng. Có thể phát biểu rằng các cạnh của các hình bình hành AB và BC tạo nên các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo, tức là tỷ lệ của DB và BE bằng tỷ lệ của GB và BF.



Dựng hoàn chỉnh hình bình hành FE. Như vậy, vì hình bình hành AB bằng hình bình hành BC, và FE là một hình bình hành khác, do đó tỷ lệ của hình bình hành AB và FE bằng tỷ lệ của hình bình hành BC và FE [MĐ. 5.7]. Nhưng tỷ lệ của hình bình hành AB và FE lại bằng tỷ lệ của DB và BE, hơn nữa tỷ lệ của hình bình hành BC và FE bằng tỷ lệ của GB và BF [MĐ. 6.1]. Do đó, tỷ lệ của DB và BE cũng bằng tỷ lệ của GB và BF. Như vậy, trong các hình bình hành AB và BC, các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo.

Bây giờ giả sử tỷ lệ của DB và BE bằng tỷ lệ của GB và BF. Có thể phát biểu rằng hình bình hành AB bằng với hình bình hành BC.

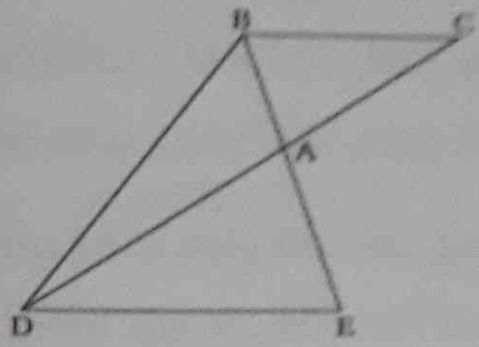
Vì tỷ lệ của BD và BE bằng tỷ lệ của GB và BF, nhưng tỷ lệ của DB và BE lại bằng tỷ lệ của hình bình hành AB và FE [MĐ. 6.1], hơn nữa tỷ lệ của GB và BF bằng tỷ lệ của hình bình hành BC và FE [MĐ. 6.1], cho nên, tỷ lệ của hình bình hành AB và hình bình hành FE cũng bằng tỷ lệ của BC và FE [MĐ. 5.11]. Như vậy, hình bình hành AB bằng hình bình hành BC [MĐ. 5.9]

Như vậy, trong các hình bình hành đẳng giác và bằng nhau, các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo. Và các hình bình hành đẳng giác có các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo thì bằng nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 15:</u> Trong các tam giác bằng nhau có một cặp góc bằng nhau, các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo. Và các tam giác có một cặp góc bằng nhau sẽ bằng nhau khi các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo.

Cho ABC và DEF là hai tam giác bằng nhau có một cặp góc bằng nhau, là góc BAC bằng góc DAE. Có thể phát biểu rằng, trong các tam giác ABC và DEF, các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo, tức là tỷ lệ của CA và AD bằng

tỷ lệ của EA và AB.



Cho đoạn CA được đặt thẳng hàng với AD. Như vậy, EA cũng thẳng hàng với AB [MĐ. 1.14]. Nối đoạn BD.

Theo đó, vì tam giác ABC bằng tam giác ADE, và BAD là một tam giác khác, cho nên tỷ lệ của tam giác CAB và BAD bằng tỷ lệ của tam giác EAD và BAD [MĐ. 5.7]. Nhưng tỷ lệ của tam giác CAB và tam giác BAD lại bằng tỷ lệ của CA và AD, và tỷ lệ của tam giác EAD và tam giác BAD bằng tỷ lệ của EA và AB [MĐ. 6. 1]. Vì vậy, tỷ lệ của CA và AD bằng tỷ lệ của EA và AB. Như vậy, trong các tam giác ABC và ADE, các cạnh xung quanh các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo.

Bây giờ cho các cạnh của hai tam giác ABC và ADE tỷ lệ chéo, và cho tỷ lệ của CA và AD bằng tỷ lệ của EA và AB. Có thể phát biểu rằng tam giác ABC bằng tam giác ADE.

Tiếp tục nối đoạn BD, vì tỷ lệ của CA và AD bằng tỷ lệ của EA và AB, trong thì tỷ lệ của CA và AD lại bằng tỷ lệ của tam giác ABC và BAD, hơn nữa tỷ lệ của EA và AB bằng

tỷ lệ của tam giác EAD và BAD [MĐ. 6.1], cho nên tỷ lệ của tam giác ABC và BAD bằng tỷ lệ của tam giác EAD và BAD. Từ đó, các tam giác ABC và EAD có chung tỷ lệ với tam giác BAD. Như vậy, tam giác ABC bằng tam giác EAD [MĐ 5.9].

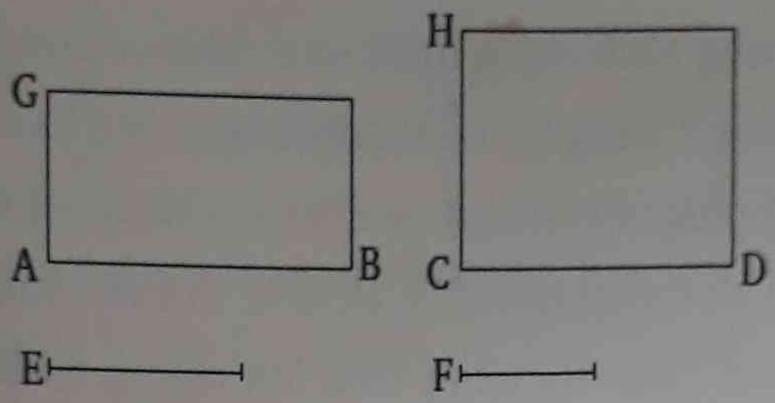
Như vậy, trong các tam giác bằng nhau có một cặp góc bằng nhau, các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo. Và các tam giác có một cặp góc bằng nhau sẽ bằng nhau khi các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 16:</u> Nếu bốn đoạn thẳng là tỷ lệ thì hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn thẳng ở hai mút bằng với hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn ở giữa[08]. Và nếu hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn thẳng nằm ở hai mút bằng với hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn thẳng nằm ở giữa thì bốn đoạn thẳng đó là tỷ lệ.

Cho AB, CD, E và F là bốn đoạn thẳng tỷ lệ, sao cho tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của E và F. Có thể phát biểu rằng hình chữ nhật tạo bởi AB và F bằng với hình chữ nhật tạo bởi CD và E.

---

08 Tác giả muốn nói đến bốn đoạn thẳng có độ dài khác nhau, hai đoạn ở hai mút là hai đoạn dài nhất và ngắn nhất, hai đoạn nằm ở giữa là hai đoạn còn lại. (ND)



Từ các điểm A và C, lần lượt kẻ các đoạn AG và CH vuông góc với AB và CD [MĐ. 1.11]. Và lấy AG bằng F, CH bằng E [MĐ. 1.3]. Dựng hoàn chỉnh các hình bình hành BG và DH.

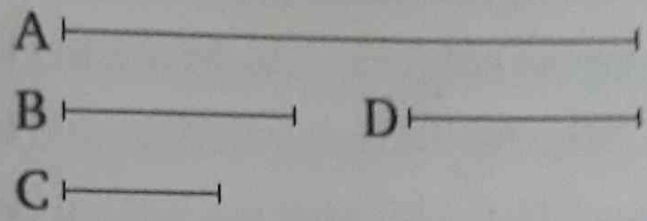
Vì tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của E và F, hơn nữa E bằng CH, và F bằng AG, cho nên tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của CH và AG. Vậy, trong các hình bình hành BG và DH, các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo. Mà các hình bình hành đẳng giác là bằng nhau khi mà các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ [MĐ. 6.14]. Cho nên, hình bình hành BG bằng hình bình hành DH. Hơn nữa, BG là hình chữ nhật tạo bởi AB và F. Vì AG bằng F. Và DH là hình chữ nhật tạo bởi CD và E. Vì E bằng CH. Như vậy, hình chữ nhật tạo bởi AB và F bằng hình chữ nhật tạo bởi CD và E.

Và bây giờ có hình chữ nhật tạo bởi AB và F bằng hình chữ nhật tạo bởi CE và E. Có thể phát biểu rằng bốn đoạn

thẳng này là tỷ lệ, tức là tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của E và F. Với cùng cách dựng hình như trên, có hình chữ nhật tạo bởi AB và F bằng hình chữ nhật tạo bởi CD và E, và BG là hình chữ nhật tạo bởi AB và F. Vì AG bằng với F. Hơn nữa DH là hình chữ nhật tạo bởi CD và E. Vì CH bằng với E. Do đó, hình chữ nhật BG bằng DH. Mà chúng lại là các hình đẳng giác với nhau. Và trong các hình bình hành đẳng giác và bằng nhau, các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo [MĐ. 6.14]. Cho nên, tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của CH và AG. Mà CH bằng E, AG bằng F. Như vậy, tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của E và F.

Vậy, nếu bốn đoạn thẳng là tỷ lệ thì hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn thẳng ở hai mút bằng với hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn ở giữa. Và nếu hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn thẳng nằm ở hai mút bằng với hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn thẳng nằm ở giữa thì bốn đoạn thẳng đó là tỷ lệ. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 17:</u> Nếu ba đoạn thẳng tỷ lệ thì hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn nằm ngoài sẽ bằng với hình vuông tạo bởi đoạn nằm giữa. Và nếu hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn nằm ngoài bằng hình vuông tạo bởi đoạn nằm giữa thì ba đoạn thẳng đó sẽ tỷ lệ.



Cho A, B, và C là ba đoạn thẳng tỷ lệ, sao cho tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của B và C. Có thể phát biểu rằng hình chữ nhật tạo bởi A và C bằng hình vuông tạo bởi B.

Lấy đoạn thẳng D bằng với B [MĐ. 1.3]

Vì tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của B và D, hơn nữa B bằng D, cho nên tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của D và C. Và nếu như bốn đại lượng này là tỷ lệ thì hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn nằm ở hai mút bằng với hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn nằm giữa [MĐ. 6.16]. Do đó, hình chữ nhật tạo bởi A và C bằng với hình chữ nhật tạo bởi B và D. Nhưng hình chữ nhật tạo bởi B và D lại là hình vuông tạo bởi B. Vì B bằng với D. Như vậy, hình chữ nhật tạo bởi A và C bằng với hình vuông tạo bởi B.

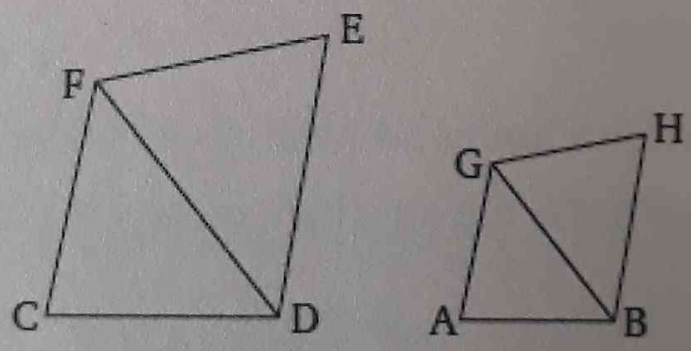
Bây giờ, cho hình chữ nhật tạo bởi A và C bằng hình vuông tạo bởi B. Có thể phát biểu rằng tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của B và C.

Với cùng cách dựng hình như trên, có hình chữ nhật tạo bởi A và C bằng với hình vuông cạnh B. Nhưng hình

vuông cạnh B lại là hình chữ nhật tạo bởi B và D. Vì B bằng D. Hình chữ nhật tạo bởi A và C do đó sẽ bằng hình chữ nhật tạo bởi B và D. Mà nếu hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn nằm ở hai mút bằng với hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn nằm giữa thì bốn đoạn thẳng sẽ tỷ lệ với nhau [MĐ.6.16]. Do đó, tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của D và C. Nhưng B bằng D. Như vậy, tỷ lệ của A và B bằng tỷ lệ của B và C.

Vậy, nếu ba đoạn thẳng tỷ lệ thì hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn nằm ngoài sẽ bằng với hình vuông tạo bởi đoạn nằm giữa. Và nếu hình chữ nhật tạo bởi hai đoạn nằm ngoài bằng hình vuông tạo bởi đoạn nằm giữa thì ba đoạn thẳng đó sẽ tỷ lệ. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 18:</u> Dựng một hình thẳng đồng dạng, và nằm cùng phía, với một hình thẳng cho trước.



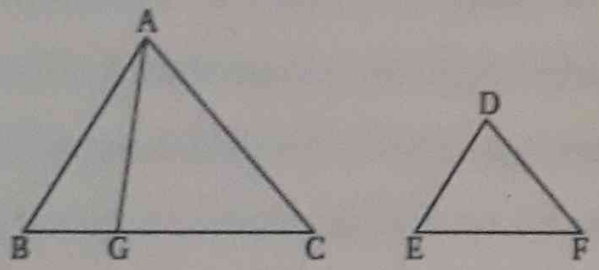
Gọi AB là đoạn thẳng cho trước, và CE là hình thẳng cho trước. Yêu cầu dựng trên đoạn AB một hình thẳng đồng

dạng và nằm cùng phía với hình thẳng CE.

Nối đoạn DF, và tại các điểm A và B trên đoạn thẳng AB, lần lượt dựng góc GAB bằng góc C, và góc ABG bằng góc CDF [MĐ. 1.23]. Theo đó, góc còn lại CFD bằng góc AGB [MĐ.1.32]. Do đó, tam giác FCD là đẳng giác với tam giác GAB. Vậy, xét về tỷ lệ thì tỷ lệ của FD và GB bằng tỷ lệ của FC và GA, và bằng tỷ lệ của CD và AB [MĐ. 6.4]. Tiếp tục, tại các điểm G và B trên đoạn thẳng GB, lần lượt dựng các góc BGH bằng góc DEF, và GBH bằng FDE [MĐ. 1.23]. Theo đó, góc còn lại tại E bằng góc còn lại tại H [MĐ.1.32]. Cho nên tam giác FDE do đó đẳng giác với tam giác GHB. Như vậy, tỷ lệ của FD và GB bằng tỷ lệ của FE và GH, và bằng tỷ lệ của ED và HB [MĐ. 6.4]. Và tỷ lệ của FD và GB đã được chứng minh là bằng với tỷ lệ của FC và GA, và bằng tỷ lệ của CD và AB. Như vậy, tỷ lệ của FC và AG cũng bằng tỷ lệ của CD và AB, và bằng tỷ lệ của FE và GH, và hơn nữa, bằng tỷ lệ của ED và HB. Và vì góc CFD bằng góc AGB, và DFE bằng BGH, cho nên góc tổng CFE bằng góc tổng AGH. Với cùng lý do đó, góc CDE cũng bằng góc ABH. Và góc tại C cũng bằng góc tại A, góc tại E bằng góc tại H. Như vậy hình AH là đẳng giác với hình CE. Và chúng có các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ. Như vậy, hình thẳng AH đồng dạng với hình thẳng CE [ĐN. 6.1].

Vậy, hình thẳng AH đồng dạng và ở cùng phía với hình thẳng cho trước CE đã được dựng trên đoạn thẳng cho trước AB. Đó là yêu cầu cần thực hiện.

<u>Mệnh đề 19:</u> Tỷ lệ của các tam giác đồng dạng bằng bình phương tỷ lệ của các cạnh tương ứng.



Cho ABC và DEF là các tam giác đồng dạng có góc tại B bằng góc tại E, và tỷ lệ của AB và BC bằng tỷ lệ của DE và EF, sao cho BC tương ứng với EF. Có thể phát biểu rằng tỷ lệ của tam giác ABC và DEF bằng bình phương tỷ lệ của cạnh BC và cạnh EF.

Lấy đoạn thẳng thứ ba là BG tạo thành tỷ lệ với BC và EF, sao cho tỷ lệ của BC và EF bằng tỷ lệ của EF và BG [MĐ. 6.11]. Nối đoạn AG.

Như vậy, vì tỷ lệ của AB và BC bằng tỷ lệ của DE và EF cho nên, xét về tỷ lệ thì tỷ lệ của AB và DE bằng tỷ lệ của BC và EF [MĐ. 5.16]. Nhưng tỷ lệ của BC và EF bằng tỷ lệ của EF và BG. Do đó, tỷ lệ của AB và DE bằng tỷ lệ của EF và BG.

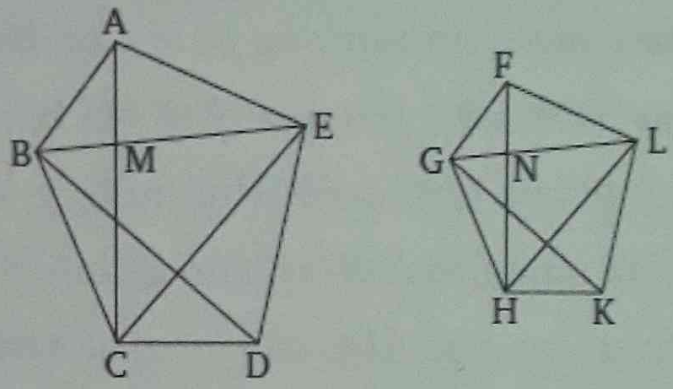
Vậy trong các tam giác ABG và DEF, các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo. Mà các tam giác có một cặp góc bằng nhau là bằng nhau khi các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo [MĐ. 6.15]. Như vậy, tam giác ABG bằng tam giác DEF. Vì tỷ lệ của BC và EF bằng tỷ lệ của EF và BG, và nếu như ba đoạn thẳng là tỷ lệ thì tỷ lệ của đoạn thứ nhất và đoạn thứ ba bằng bình phương tỷ lệ của đoạn thứ nhất và đoạn thứ hai [ĐN. 5.9], cho nên tỷ lệ của BC và BG bằng bình phương tỷ lệ của CB và EF. Hơn nữa tỷ lệ của CB và BG bằng tỷ lệ của tam giác ABC và tam giác ABG [MĐ. 6.1]. Như vậy, tỷ lệ của tam giác ABC và tam giác ABG cũng bằng bình phương tỷ lệ của BC và EF. Mà tam giác ABG bằng tam giác DEF. Do đó, tỷ lệ của tam giác ABC và DEF cũng bằng bình phương tỷ lệ của BC và EF.

Vậy, tỷ lệ của các tam giác đồng dạng bằng bình phương tỷ lệ của các cạnh tương ứng. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Hệ quả

Như vậy từ mệnh đề trên, rõ ràng rằng nếu có ba đoạn thẳng tỷ lệ thì tỷ lệ của đoạn thứ nhất và đoạn thứ ba sẽ bằng tỷ lệ của hình dựng trên đoạn thứ nhất và hình đồng dạng và ở cùng phía với nó được vẽ trên đoạn thứ hai. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 20: **Có thể được chia các đa giác đồng dạng thành một số lượng như nhau các tam giác đồng dạng tương ứng tỷ lệ với các đa giác ban đầu, và tỷ lệ giữa các đa giác bằng bình phương tỷ lệ của một cạnh bên này và cạnh tương ứng bên kia.**



Gọi ABCDE và FGHKL là các đa giác đồng dạng, và AB tương ứng với FG. Có thể phát biểu rằng các đa giác ABCDE và FGHKL có thể được chia thành một số lượng như nhau các tam giác đồng dạng tương ứng tỷ lệ với các đa giác ban đầu, và tỷ lệ của đa giác ABCDE và đa giác FGHKL bằng bình phương tỷ lệ của AB và FG.

Nối các đoạn BE, EC, GL, và LH.

Vì đa giác ABCDE đồng dạng với đa giác FGHKL nên góc BAE bằng góc GFL, và tỷ lệ của BA và AE bằng tỷ lệ của GF và FL [ĐN. 6.1]. Theo đó, vì ABE và FGL là hai tam giác có một cặp góc bằng nhau và các cạnh bên của các góc bằng

nhau là tỷ lệ, nên tam giác ABE là đẳng giác với tam giác FGL [MĐ. 6.6]. Do đó, chúng cũng đồng dạng[MĐ. 6.4, ĐN. 6.1]. Vậy, góc ABE bằng góc FGL. Và góc tổng ABC bằng góc tổng FGH theo tính chất của các đa thức đồng dạng. Góc còn lại EBC bằng góc LGH. Theo tính chất của các tam giác đồng dạng ABE và FGL, tỷ lệ của EB và BA bằng tỷ lệ của LG và GF, trong thì cũng theo tính chất của các đa giác đồng dạng thì tỷ lệ của AB và BC bằng tỷ lệ của FG và GH, cho nên, theo tính chất bắc cầu thì tỷ lệ của EB và BC bằng tỷ lệ của LG và GH [MĐ. 5.22], các cạnh bên của các góc bằng nhau là EBC và LGH cũng tỷ lệ. Như vậy, tam giác EBC đẳng giác với tam giác LGH [MĐ. 6.6]. Do đó, tam giác EBC cũng đồng dạng với tam giác LGH [MĐ. 6.4, ĐN. 6.1]. Với cùng lý do đó, tam giác ECD cũng đồng dạng với tam giác LHK. Như vậy, các đa giác đồng dạng ABCDE và FGHKL đã được chia thành cùng một số lượng các tam giác đồng dạng.

Cũng có thể phát biểu rằng các tam giác tương ứng tỷ lệ với các đa giác ban đầu. Tức là, các tam giác là tỷ lệ với nhau, trong đó ABC, EBC và ECD là nhóm đại lượng trước, và các đại lượng sau tương ứng chúng lần lượt là FGL, LGH và LHK. Cũng có thể phát biểu rằng tỷ lệ của đa giác ABCDE và đa giác FGHKL bằng bình phương tỷ lệ giữa các cạnh tương ứng của chúng – tức là các cạnh AB và FG.

Nối các đoạn AC và FH. Vì góc ABC bằng góc FGH, hơn nữa tỷ lệ của AB và BC bằng tỷ lệ của FG và GH, theo tính chất của các đa giác đồng dạng, tam giác ABC là đẳng giác với tam giác FGH [MĐ. 6.6]. Do đó, góc BAC bằng góc GFH, và góc BCA bằng góc GHF. Và vì góc BAM bằng góc GFN, và góc ABM cũng bằng góc FGN (xem phần trước) cho nên góc còn lại AMB cũng bằng góc còn lại FNG [MĐ. 1.32]. Như vậy, tam giác ABM là đẳng giác với tam giác FGN. Tương tự, cũng có thể chứng minh rằng tam giác BMC là đẳng giác với tam giác GNH. Do đó, tỷ lệ của AM và MB bằng tỷ lệ của FN và NG, hơn nữa, tỷ lệ của MB và MC bằng tỷ lệ của GN và NH [MĐ. 6.4]. Do đó, theo tính chất bắc cầu, tỷ lệ của AM và MC cũng bằng tỷ lệ của FN và NH [MĐ. 5.22]. Mà tỷ lệ của AM và MC lại bằng tỷ lệ của tam giác ABM và tam giác MBC, và bằng tỷ lệ của tam giác AME và tam giác EMC. Vì tỷ lệ của chúng bằng tỷ lệ của các cạnh đáy [MĐ. 6.1]. Mà tỷ lệ của một trong số các đại lượng trước và một trong các đại lượng sau bằng tỷ lệ của tổng các đại lượng trước và tổng các đại lượng sau [MĐ. 5.12]. Cho nên, tỷ lệ của tam giác AMB và tam giác BMC bằng tỷ lệ của tam giác ABE và tam giác CBE. Trong thì tỷ lệ của tam giác AMB và tam giác BMC lại bằng tỷ lệ của AM và MC. Như vậy tỷ lệ của AM và MC cũng bằng tỷ lệ của tam giác ABE và EBC.

Với cùng lý do đó, tỷ lệ của FN và NH bằng tỷ lệ của tam giác FGL và tam giác GLH. Và tỷ lệ của AM và MC bằng tỷ lệ của FN và NH. Do đó, tỷ lệ của tam giác ABE và BEC cũng bằng tỷ lệ của tam giác FGL và GLH, và đảo lại thì tỷ lệ của tam giác ABE và FGL bằng tỷ lệ của tam giác BEC và GLH [MĐ. 5.16]. Tương tự, nếu như nối các đoạn BD và GK thì cũng có thể chứng minh rằng tỷ lệ của tam giác BEC và tam giác LGH bằng tỷ lệ của tam giác ECD và LHK. Vì tỷ lệ của tam giác ABE và FGL bằng tỷ lệ của tam giác EBC và LGH, và hơn nữa, bằng tỷ lệ của ECD và LHK, cũng vậy, vì tỷ lệ của một trong các đại lượng trước và một đại lượng của nhóm sau thì bằng tỷ lệ của tổng các đại lượng trước và tổng các đại lượng sau [MĐ. 5.12], cho nên tỷ lệ của tam giác ABE và FGL bằng tỷ lệ của đa giác ABCDE và đa giác FGHKL. Trong khí đó tỷ lệ của tam giác ABE và FGL lại bằng bình phương tỷ lệ của các cạnh tương ứng của chúng là AB và FG. Vì tỷ lệ của các tam giác đồng dạng bằng bình phương tỷ lệ các cạnh tương ứng của chúng [MĐ. 6.14]. Như vậy, tỷ lệ của đa giác ABCDE và DEFGL cũng bằng bình phương tỷ lệ các cạnh tương ứng của chúng là AB và FG.

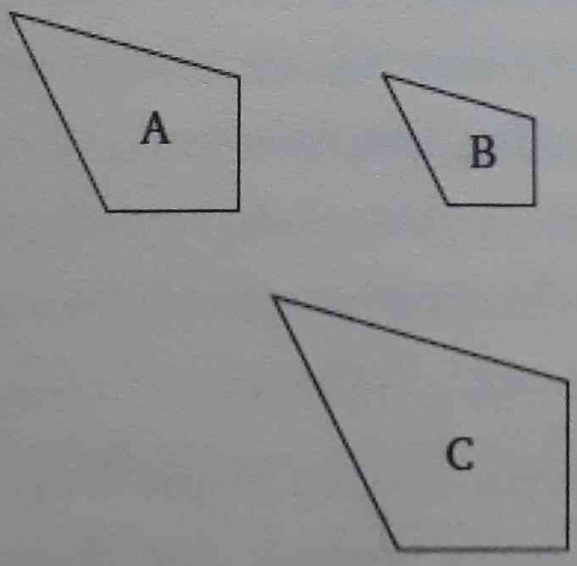
Vậy, có thể được chia các đa giác đồng dạng thành một số lượng như nhau các tam giác đồng dạng tương ứng tỷ lệ với các đa giác ban đầu, và tỷ lệ giữa các đa giác bằng bình

phương tỷ lệ của một cạnh bên này và cạnh tương ứng bên kia. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Hệ quả

Theo cùng một cách như vậy, có thể chứng minh rằng trong các tứ giác đồng dạng thì tỷ lệ giữa chúng bằng bình phương tỷ lệ của các cạnh tương ứng của chúng. Cũng có thể chứng minh điều này với các tam giác. Như vậy, nói một cách tổng quát, tỷ lệ của các hình đồng dạng bằng bình phương tỷ lệ các cạnh tương ứng của chúng. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 21:</u> Các hình thẳng cùng đồng dạng với một hình thẳng khác thì đồng dạng với nhau.

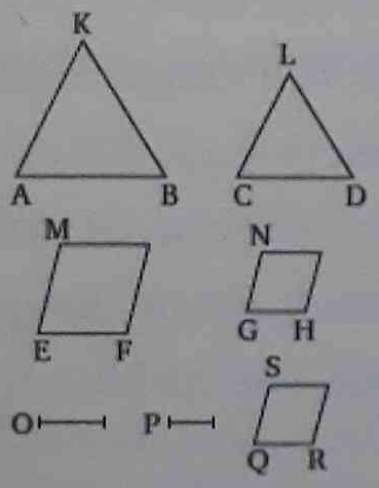


Cho A và B là các hình thẳng cùng đồng dạng với hình

phẳng C. Có thể phát biểu rằng A cũng đồng dạng với B.

Vì A đồng dạng với C nên A là đẳng giác với C, và chúng có các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ [ĐN. 6.1]. Tiếp tục, vì B đồng dạng với C nên B đẳng giác với C, và chúng có các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ [ĐN. 6.1]. Do đó, A và B đều đẳng giác với C, và chúng có các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ [như vậy, A cũng đẳng giác với B, và cũng có các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ]. Như vậy A đồng dạng với B [ĐN. 6.1]. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 22:</u> Nếu bốn đoạn thẳng là tỷ lệ thì các hình thẳng đồng dạng, dựng theo cùng một cách trên các đoạn thẳng đó cũng sẽ tỷ lệ. Và nếu các hình thẳng đồng dạng được dựng theo cùng một cách trên các đoạn thẳng là tỷ lệ với nhau thì các đoạn thẳng đó cũng tỷ lệ với nhau.



Cho AB, CD, EF và GH là bốn đoạn thẳng tỷ lệ, sao cho tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của EF và GH. Và trên các đoạn AB và CD, lần lượt vẽ các hình thẳng đồng dạng KAB và LCD, nằm cùng phía, và trên các đoạn EF và GH lần lượt vẽ các hình thẳng đồng dạng MF và NH nằm cùng phía. Có thể phát biểu rằng tỷ lệ của KAB và LCD bằng tỷ lệ của MF và NH.

Gọi O là đoạn thẳng thứ ba tạo thành tỷ lệ với AB và CD, và P là đoạn thẳng thứ ba tạo thành tỷ lệ với EF và GH [MĐ. 6.11]. Vì tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của EF và GH, hơn nữa tỷ lệ của CD và O bằng tỷ lệ của GH và P cho nên theo tính chất bắc cầu thì tỷ lệ của AB và O bằng tỷ lệ của EF và P [MĐ. 5.22]. Nhưng tỷ lệ của AB và O cũng bằng tỷ lệ của KAB và LCD, và tỷ lệ của EF và P bằng tỷ lệ của MF và NH [MĐ. 5.19]. Cho nên, tỷ lệ của KAB và LCD bằng tỷ lệ MF và NH.

Bây giờ cho tỷ lệ của KAB và LCD bằng với tỷ lệ của MF và NH. Cũng phát biểu rằng tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của EF và GH. Vì nếu tỷ lệ của AB và CD không bằng tỷ lệ của EF và GH thì giả sử tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của EF và QR [MĐ. 6.12]. Trên đoạn QR, dựng hình thẳng SR đồng dạng, và nằm cùng phía, với MF hoặc NH [MĐ. 6.18, 6.21]

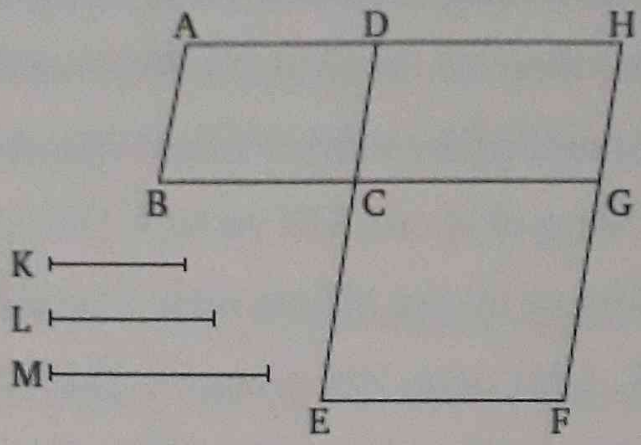
Theo đó, vì tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của EF và QR, và trên các đoạn AB và CD, lần lượt dựng các hình thẳng đồng dạng KAB và LCD nằm cùng phía, và trên các đoạn EF và QR lần lượt dựng các hình thẳng đồng dạng MF và SR nằm cùng phía, theo đó thì tỷ lệ của KAB và LCD bằng tỷ lệ của MF và SR (xem phần trên). Và theo giả thiết thì tỷ lệ của KAB và LCD bằng tỷ lệ của MF và NH. Do đó, tỷ lệ của MF và SR cũng bằng tỷ lệ của MF và NH. Vậy MF có cùng tỷ lệ với NH và SR. Cho nên, NH bằng SR [MĐ. 5.9]. Hơn nữa cũng đồng dạng và nằm cùng phía. Như vậy, GH bằng QR[09]. Và vì tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ của EF và QR, hơn nữa QR lại bằng GH, cho nên tỷ lệ của AB và CD bằng tỷ lệ EF và GH.

Như vậy, nếu bốn đoạn thẳng là tỷ lệ thì các hình thẳng đồng dạng, dựng theo cùng một cách trên các đoạn thẳng đó cũng sẽ tỷ lệ. Và nếu các hình thẳng đồng dạng được dựng theo cùng một cách trên các đoạn thẳng là tỷ lệ với nhau thì các đoạn thẳng đó cũng tỷ lệ với nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

---

09 Ở đây, Euclid giả thiết, mà không chứng minh, rằng nếu hai hình đồng dạng là bằng nhau thì các cặp cạnh tương ứng cũng bằng nhau.

Mệnh đề 23: Các hình bình hành đẳng giác tạo với nhau một tỷ lệ bằng tích số[10] của các tỷ lệ giữa các cạnh của chúng.



Cho các hình bình hành đẳng giác AC và CF có góc BCD bằng góc ECG. Có thể phát biểu rằng hình bình hành AC tạo với hình bình hành CF một tỷ lệ bằng tích số của các tỷ lệ giữa các cạnh của chúng.

Đặt BC thẳng hàng với CG. Như vậy, DC cũng thẳng hàng với CE [MĐ. 1.14]. Dựng hoàn chỉnh hình bình hành DG. Và có thêm đoạn thẳng K. Cho tỷ lệ của BC và CG bằng tỷ lệ của K và L, hơn nữa, tỷ lệ của DC và CE bằng tỷ lệ của L và M [MĐ. 6.12].

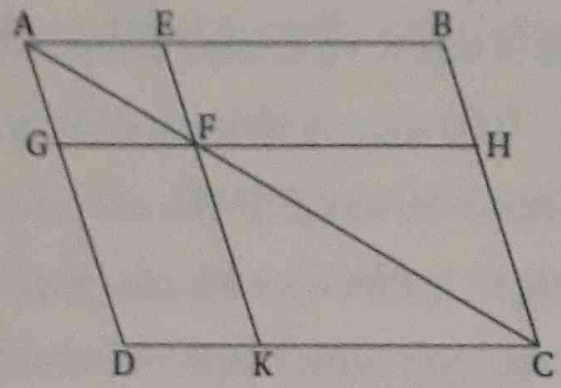
Theo đó, tỷ lệ của K và L, và của L và M bằng tỷ lệ của các cạnh, tức là tỷ lệ của BC và CG và tỷ lệ của DC và CE theo thứ tự đó. Nhưng tỷ lệ của K và M là tích số của các tỷ lệ

10 Theo thuật ngữ hiện đại, nếu hai tỷ số được *kết hợp* lại tức là chúng được nhân với nhau (Bản tiếng Anh dùng từ compound. (ND))

của K và L và tỷ lệ của L và M. Như vậy, tỷ lệ của K và M cũng là tích số của các tỷ lệ giữa các cạnh của các hình bình hành. Vì tỷ lệ của BC và CG bằng tỷ lệ của hình bình hành AC và CH [MĐ. 6.1], trong thì tỷ lệ của BC và CG lại bằng tỷ lệ của K và L, cho nên tỷ lệ của K và L cũng bằng tỷ lệ của hình bình hành AC và CH. Tiếp tục, vì tỷ lệ của DC và CE bằng tỷ lệ của hình bình hành CH và CF [MĐ. 6.1], trong thì tỷ lệ của DC và CE lại bằng tỷ lệ của L và M, cho nên tỷ lệ của L và M cũng bằng tỷ lệ của hình bình hành CH và CF. Như vậy, vì tỷ lệ của K và L đã được chứng minh là bằng tỷ lệ của hình bình hành AC và CH, và tỷ lệ của L và M bằng tỷ lệ của hình bình hành CH và CF, cho nên theo tính chất bắc cầu thì tỷ lệ của K và M bằng tỷ lệ của hình bình hành AC và CF [MĐ. 5.22]. Mà tỷ lệ của K và M là tích số của các tỷ lệ giữa các cạnh của hình bình hành. Như vậy, hình bình hành AC cũng tạo với hình bình hành CF một tỷ lệ bằng tích số giữa các tỷ lệ của các cạnh của chúng.

Như vậy, các hình bình hành đẳng giác tạo với nhau một tỷ lệ bằng tích số của các tỷ lệ giữa các cạnh của chúng. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 24: Trong mọi hình bình hành, các hình bình hành xung quanh đường chéo là đồng dạng với hình ban đầu, và cũng đồng dạng với nhau.



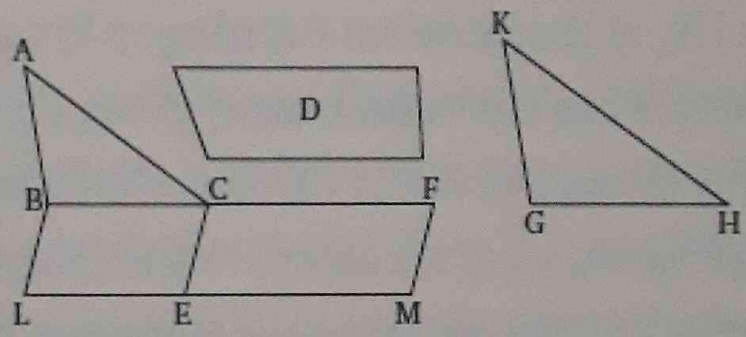
Cho hình bình hành ABCD, và AC là đường chéo của nó. EG và HK là các hình bình hành xung quanh AC. Có thể phát biểu rằng hình bình hành EG và HK đều đồng dạng với hình bình hành tổng ABCD, và đồng dạng với nhau.

Vì EF được vẽ song song với một trong các cạnh của tam giác ABC là BC nên tỷ lệ của BE và EA bằng tỷ lệ của CF và FA [MĐ. 6.2]. Tiếp tục, vì FG được vẽ song song với một trong các cạnh của tam giác ACD là CD, nên tỷ lệ của CF và FA bằng tỷ lệ của DG và GA [MĐ. 6.2]. Nhưng tỷ lệ của CF và FA đã được chứng minh là bằng BE và EA. Cho nên tỷ lệ của BE và EA bằng tỷ lệ của DG và GA [MĐ. 5.18]. Do đó, kết hợp lại thì tỷ lệ của BA và AE bằng tỷ lệ của DA và AG [MĐ. 5.18]. Theo tỷ lệ chéo, tỷ lệ của BA và AD bằng

tỷ lệ của AE và AG [MĐ. 5.16]. Do đó, trong các hình bình hành ABCD và EG, các cạnh bên của góc chung BAD là tỷ lệ. Vì GF song song với DC nên góc AFG bằng góc DCA [MĐ. 1.29]. Hơn nữa DAC là góc chung của hai tam giác ADC và AGF. Cho nên, tam giác ADC là đẳng giác với tam giác AGF [MĐ. 1.32]. Vậy với cùng lý do đó, tam giác ACB là đẳng giác với tam giác AFE, và hình bình hành tổng ABCD là đẳng giác đối với hình bình hành EG. Cho nên, tỷ lệ của AD và DC bằng tỷ lệ của AG và GF, tỷ lệ của DC và CA bằng tỷ lệ của GF và FA, tỷ lệ của AC và CB bằng tỷ lệ của AF và FE, và hơn nữa tỷ lệ của CB và BA bằng tỷ lệ của FE và EA [MĐ. 6.4]. Và vì tỷ lệ của DC và CA đã được chứng minh là bằng tỷ lệ của GF và FA, và tỷ lệ của AC và CB bằng tỷ lệ của GF và FE [MĐ. 5.22]. Do đó, trong các hình bình hành ABCD và EG, các cạnh bên của các góc bằng nhau là tỷ lệ. Như vậy hình bình hành ABCD là đồng dạng với hình bình hành EG [ĐN. 6.1]. Cũng vì lý do đó, hình bình hành ABCD cũng đồng dạng với hình bình hành KH. Tức là, hình bình hành EG và hình bình hành KH cùng đồng dạng với hình bình hành ABCD. Mà các hình thẳng đồng dạng với cùng một hình thẳng khác thì cũng đồng dạng với nhau [MĐ. 6.21]. Như vậy, hình bình hành EG cũng đồng dạng với hình bình hành HK.

Vậy, trong mọi hình bình hành, các hình bình hành xung quanh đường chéo là đồng dạng với hình ban đầu, và cũng đồng dạng với nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 25:</u> Dựng một hình thẳng đồng dạng với một hình thẳng cho trước và bằng với một hình thẳng cho trước khác.



Gọi ABC là hình thẳng cho trước mà hình cần dựng là đồng dạng với nó, và D là hình thẳng mà hình cần dựng bằng với nó. Yêu cầu là dựng một hình thẳng đồng dạng với ABC và bằng D.

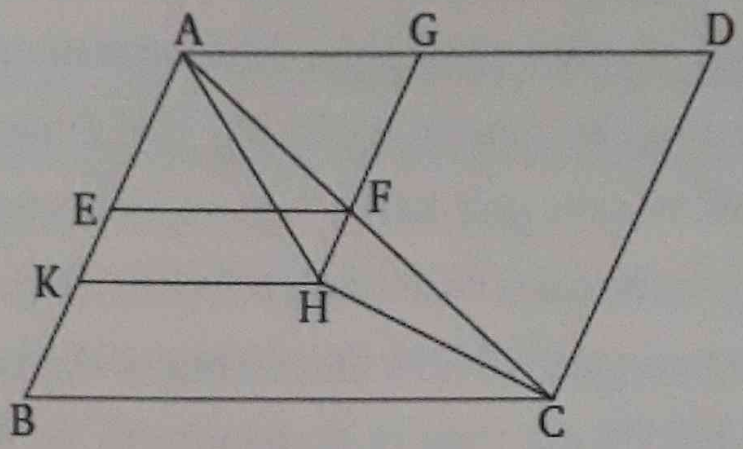
Trên đoạn BC, dựng hình bình hành BE bằng với tam giác ABC [MĐ. 1.44], trên đoạn CE, dựng hình bình hành CM bằng với D theo góc FCE, bằng với góc CBL [MĐ. 1.45]. Theo đó, BC thẳng hàng với CF, còn LE thì thẳng hàng với EM [MĐ. 1.14]. Đặt đoạn GH tạo trung tỷ với các đoạn BC

và CF [MĐ. 6.13]. Trên đoạn GH, dựng hình KGH đồng dạng và nằm cùng một phía với hình ABC [MĐ. 6.18].

Vì tỷ lệ của BC và GH bằng tỷ lệ của GH và CF, và nếu ba đoạn thẳng là tỷ lệ thì tỷ lệ của đoạn thứ nhất và đoạn thứ ba sẽ bằng với tỷ lệ của hình vẽ trên đoạn thứ nhất và hình đồng dạng với nó, nằm cùng phía, được vẽ trên đoạn thứ hai [HQ. MĐ. 6.19.] cho nên tỷ lệ của BC và CF bằng tỷ lệ của tam giác ABC và tam giác KGH. Nhưng tỷ lệ của BC và CF cũng bằng tỷ lệ của hình bình hành BE và EF [MĐ. 6.1]. Như vậy, tỷ lệ của tam giác ABC và KGH bằng tỷ lệ của hình bình hành BE và EF. Do đó, theo tỷ lệ chéo thì tỷ lệ của tam giác ABC và hình bình hành BE bằng tỷ lệ của tam giác KGH và hình bình hành EF [MĐ. 5.16]. Mà tam giác ABC bằng hình bình hành BE. Cho nên tam giác KGH cũng bằng hình bình hành EF. Nhưng hình bình hành EF bằng D. Như vậy, KGH cũng bằng D. Và tam KGH cũng bằng ABC.

Như vậy, đã dựng được một hình thẳng đồng dạng với một hình thẳng cho trước và bằng với một hình thẳng cho trước khác. Đó chính là yêu cầu cần thực hiện.

<u>Mệnh đề 26:</u> Nếu từ một hình bình hành tách ra một hình bình hành đồng dạng với nó, và ở về cùng phía, có cùng một góc với nó, thì hình bình hành được tách ra đó có cùng đường chéo với hình gốc.



Giả sử, cho hình bình hành ABCD, hình bình hành AF được tách ra đồng dạng, ở về cùng phía với ABCD, có cùng góc DAB với nó. Có thể phát biểu rằng ABCD có cùng đường chéo với AF.

Giả sử nếu không phải là như vậy thì, gọi AHC là đường chéo của ABCD. Và dựng GF, kéo dài nó đến điểm H. Dựng đoạn HK đi qua H, song song với AD hoặc BC [MĐ 1.31].

Như vậy, bởi vì hình bình hành ABCD có cùng đường chéo với hình bình hành KG, cho nên tỷ lệ của DA và AB bằng tỷ lệ của GA và AK [MĐ 6.24]. Và, vì sự đồng dạng của hình bình hành ABCD và hình bình hành EG, tỷ lệ của DA

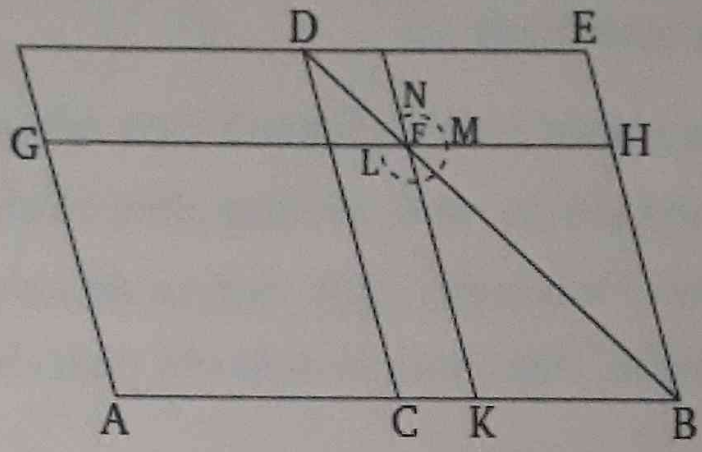
và AB cũng bằng tỷ lệ của GA và AE. Vậy tỷ lệ của GA và AK cũng bằng tỷ lệ của GA và AE. Như thế GA có cùng tỷ lệ với AK và AE. Cho nên AE bằng AK [MĐ 5.9], cái nhỏ hơn bằng cái lớn hơn. Điều này là không thể. Do đó, hình bình hành ABCD không thể không có cùng đường chéo với hình bình hành AF. Vậy, hình bình hành ABCD có cùng đường chéo với hình bình hành AF.

Vậy, nếu từ một hình bình hành tách ra một hình bình hành đồng dạng với nó, và ở về cùng phía, có cùng một góc với nó, thì hình bình hành được tách ra đó có cùng đường chéo với hình gốc. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 27:</u> Trong tất cả các hình bình hành được dựng trên một đoạn thẳng, và bị chắn các hình bình hành đồng dạng khác, nằm về cùng một phía, dựng trên một nửa đoạn thẳng đó, thì hình lớn nhất là hình dựng trên nửa đoạn thẳng và đồng dạng với hình bình hành chắn nó.

Cho AB là một đoạn thẳng và được chia đôi ở điểm C [MĐ. 1.10]. Hình bình hành AD được dựng trên đoạn AB, chắn bởi hình bình hành DB dựng trên một nửa của AB, là CB. Có thể phát biểu rằng trong tất cả các hình bình hành dựng trên AB, bị chắn bởi các hình bình hành đồng dạng,

nằm về cùng một phía, với hình bình hành DB, thì hình lớn nhất là hình AD. Cho AF là hình bình hành dựng trên đoạn AB, chắn bởi hình bình hành FB đồng dạng và nằm về cùng một phía với hình bình hành BD, có thể nói rằng hình bình hành AD lớn hơn hình bình hành AF.



Vì hình bình hành DB là đồng dạng với FB cho nên chúng có cùng đường chéo [MĐ 6.26]. Dựng đường chéo chung của chúng, là đoạn DB, và dựng các hình còn lại.

Như vậy, vì hình bình hành [bù] CF bằng hình FE [MĐ. 1.43], và có hình bình hành FB là phần chung, cho nên hình bình hành [tổng] CH bằng hình bình hành [tổng] KE. Trong thì, hình bình hành CH thì bằng hình CG, vì AC bằng CB [MĐ. 6.1]. Vậy, hình bình hành GC cũng bằng hình bình hành EK. Cộng hình bình hành CF vào cả hai vế. Như vậy, hình bình hành tổng AF bằng hình bình hành khuyết LMN.

Do vậy, hình bình hành DB – cũng tức là hình bình hành AD – lớn hơn hình bình hành AF.

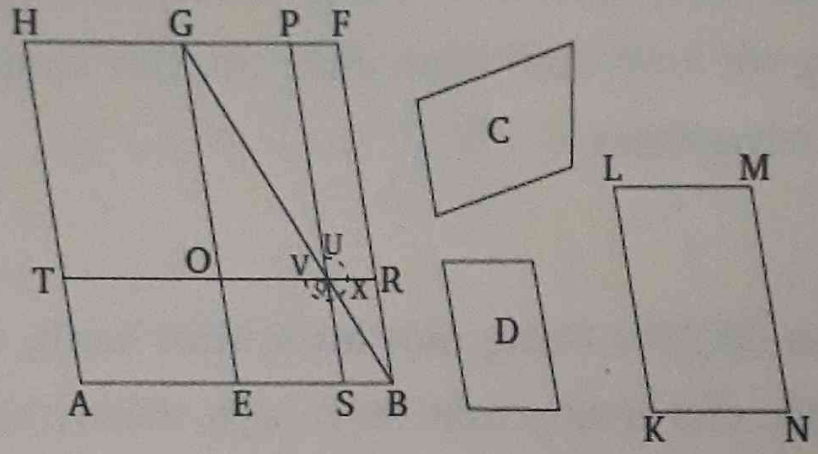
Vậy, trong tất cả các hình bình hành được dựng trên một đoạn thẳng, và bị chắn các hình bình hành đồng dạng khác, nằm về cùng một phía, dựng trên một nửa đoạn thẳng đó, thì hình lớn nhất là hình dựng trên nửa đoạn thẳng và đồng dạng với hình bình hành chắn nó. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 28[11]: Dựng một hình bình hành, bằng với một đa giác cho trước, trên một đoạn thẳng, hình bình hành được dựng đó bị chắn bởi một hình bình hành đồng dạng với một hình bình hành cho trước khác. Điều kiện cần là đa giác cho trước [bằng với hình bình hành được dựng] không được lớn hơn hình bình hành dựng trên một nửa của đoạn thẳng và đồng dạng với phần khuyết.

Có AB là đoạn thẳng cho trước, C là đa giác bằng với mà hình bình hành được cần trên AB, không lớn hơn hình

11 Mệnh đề này là dạng hình học của phương trình bậc hai $x2-\alpha x+\beta = 0$. Trong đó, x là tỷ số của cạnh của phần khuyết và cạnh tương ứng của hình D, α là tỷ số của độ dài AB và độ dài của cạnh của hình D tương ứng với cạnh của phần khuyến nằm trên AB, và β là tỷ số của diện tích của hình C và hình D. Điều kiện để phương trình có nghiệm thực là $\beta < \alpha 2 / 4$. Chỉ có nghiệm nhỏ của phương trình được giải ở đây. Nghiệm lớn cũng có thể tìm được bằng phương pháp tương tự.

bình hành dựng trên nửa đoạn AB và đồng dạng với phần khuyết, và D là hình bình hành đồng dạng với phần khuyết. Như vậy, yêu cầu là phải dựng một hình bình hành bằng với đa giác C, nằm trên đoạn AB, chắn bởi một hình bình hành đồng dạng với D.



Chia đôi đoạn AB tại điểm E [MĐ. 1.10], và hình bình hành EBFG, đồng dạng và ở cùng về một phía với hình bình hành D, được dựng trên đoạn EB [MĐ. 6.18]. Dựng hoàn chỉnh hình bình hành AG.

Như vậy, nếu AG bằng C thì các điều kiện nêu ra ở trên xảy xa. Bởi hình bình hành AG, bằng với đa giác C cho trước, được dụng trên đoạn AB, chắc bởi hình bình hành GB đồng dạng với hình bình hành D. Nếu không thì HE lớn hơn C. Trong khi HE bằng với GB [MĐ. 6.1]. Như vậy GB cũng lớn hơn C. Dựng hình bình hành KLMN vừa đồng dạng vừa ở

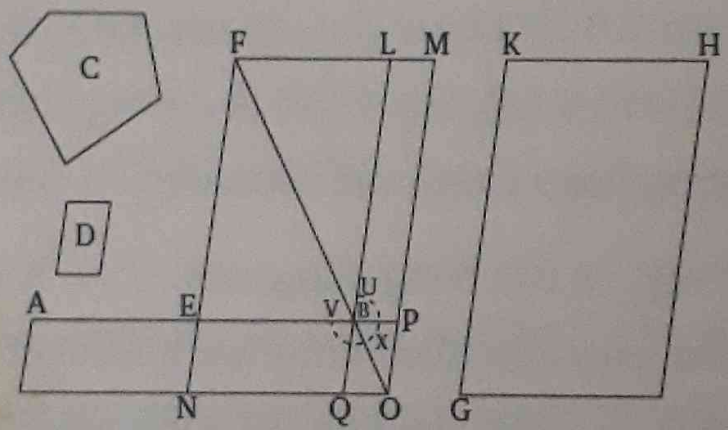
về cùng một phía với D đồng thời bằng với phần dư mà GB lớn hơn C [MĐ. 6.25]. Tuy nhiên, GB đồng dạng với D. Khi đó KM cũng đồng dạng với GB [MĐ. 6.21]. Như vậy, có KL tương ứng với GE và LM tương ứng với GF. Và vì hình bình hành GB bằng tổng của C và KM nên GB lớn hơn KM. Cho nên GE cũng lớn hơn KL và GF lớn hơn LM. Dựng GO bằng với KL, và GP bằng LM [MĐ. 1.3]. Dựng hoàn chỉnh hình bình hành OGPQ. Như vậy, [GQ] bằng và đồng dạng với KM [trong thì KM đồng đạng với GB]. Như vậy GQ cũng đồng dạng với GB [MĐ. 6.21]. Cho nên GQ và GB có cùng đường chéo [MĐ. 6.26]. Gọi GQB là đường chéo chung của chúng, và dựng hoàn chỉnh các phần còn lại của hình vẽ.

Như vậy, vì BG bằng tổng của C và KM, trong đó GQ bằng KM, cho nên hình bình hành khuyết UWV bằng phần còn lại là C. Và vì phần bù PR bằng phần bù OS [MĐ. 1.43], hãy cộng QB vào cả hai vế. Khi đó hình bình hành tổng PB bằng hình bình hành tổng OB. Nhưng OB lại bằng TE, do cạnh AE bằng cạnh EB [MĐ 6.1]. Vậy TE cũng bằng PB. Cộng OS vào cả hai vế. Khi đó hình bình hành tổng TS bằng hình bình hành khuyết VWU. Trong khi đó VWU đã được chứng minh là bằng C. Do đó, hình bình hành TS bằng hình C.

Vậy, hình bình hành ST, bằng với đa giác cho trước C,

được dựng trên đoạn AB, bị chắn bởi hình bình hành QB, đồng dạng với D [cùng lúc thì QB cũng đồng dạng với GQ [MĐ 6.24]). Đó là điều phải thực hiện.

<u>Mệnh đề 29</u>[12]: Dựng một hình bình hành, bằng với một đa giác cho trước, trên một đoạn thẳng, được bao bởi một hình bình hành đồng dạng với một hình bình hành cho trước.



Có AB là đoạn thẳng cho trước, và C là đa giác cho trước bằng với hình bình hành cần dựng trên AB, và D là hình bình hành cần phải đồng dạng với phần bao. Yêu cầu là dựng hình bình hành bằng trên đoạn AB với đa giác C cho trước, bao bởi hình bình hành đồng dạng với D.

---

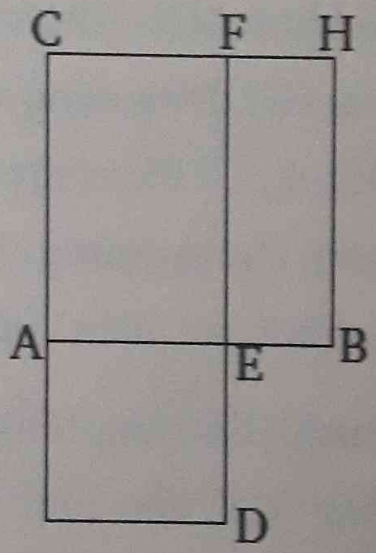
12 Mệnh đề này là dạng hình học của phương trình bậc hai $x^2-\alpha x-\beta = 0$. Trong đó, x là tỷ số của cạnh của phần bù và cạnh tương ứng của hình D, α là tỷ số của độ dài AB và độ dài của cạnh của hình D tương ứng với cạnh của phần bù nằm trên AB, và β là tỷ số của diện tích của hình C và D. Chỉ có nghiệm dương của phương trình được giải ở đây.

Chia đôi đoạn AB tại điểm E [MĐ. 1.10], và dựng hình bình hành BF trên đoạn EB, đồng dạng và nằm về cùng một phía với D [MĐ 6.18]. Và dựng hình bình hành GH vừa đồng dạng, nằm cùng một phía với D, vừa bằng tổng của BF và C [MĐ. 6.25]. Có KH tương ứng với FL, và KG tương ứng với FE. Vì hình bình hành GH lớn hơn hình bình hành FB nên KH cũng lớn hơn FL và KG lớn hơn FE. Kéo dài FL và FE, sao cho FLM bằng KH và FEN bằng KG [MĐ. 1.3]. Dựng hoàn chỉnh hình bình hành MN. Như vậy MN bằng và đồng dạng với GH. Trong thì GH đồng dạng với EL. Vậy MN cũng đồng dạng với EL [MĐ. 6.21]. EL vì vậy cũng có cùng đường chéo với MN [MĐ 6.26]. Dựng đường chéo chung của chúng là FO, và dựng hoàn chỉnh các phần còn lại của hình vẽ.

Vì hình bình hành GH bằng tổng của EL và C, trong khi đó thì GH lại bằng MN, cho nên MN cũng bằng tổng của EL và C. Trừ EL khỏi cả hai vế. Khi đó hình bình hành khuyết còn lại XWV bằng với C. Và vì AE bằng EB nên hình bình hành AN cũng bằng hình bình hành NB [MĐ 6.1], tức là bằng hình bình hành LP [MĐ 1.43]. Cộng hình bình hành EO vào cả hai vế. Như vậy sẽ có hình bình hành tổng AO bằng với hình bình hành khuyết VWX. Nhưng VWX lại bằng C. Cho nên hình bình hành AO cũng bằng C.

Vậy, hình bình hành AO, bằng đa giác C cho trước, đã được dựng trên đoạn thẳng AB cho trước, bao bởi hình bình hành QP đồng dạng với hình bình hành D, bởi PQ cũng đồng dạng với EL [MĐ 6.24]. Đó là điều cần phải thực hiện.

Mệnh đề 30[13]: Chia một đoạn thẳng cho trước có chiều dài đã biết theo trung ngoại tỷ.



Cho AB là đoạn thẳng có chiều dài đã biết. Yêu cầu là chia đoạn thẳng AB theo các trung và ngoại tỷ.

Dựng hình vuông BC trên cạnh AB [MĐ 1.46], và dựng hình bình hành CD trên cạnh AC, bằng với hình vuộng BC, bao bởi hình AD đồng dạng với BC [MĐ 6.29].

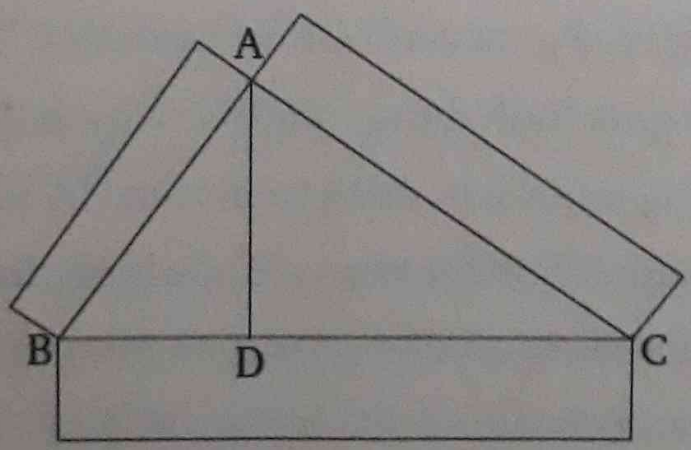
BC là một hình vuông. Cho nên D cũng là hình vuông.

13 Cách cắt đoạn thẳng này cũng được gọi là cắt theo tỷ lệ vàng - Xem MĐ 2.11.

Và vì BC bằng CD, hãy trừ hình chữ nhật CE khỏi cả hai vế. Khi đó hình chữ nhật BF còn lại bằng với hình vuông AD còn lại. Và cái này cũng đẳng giác với cái kia. Như vậy các cạnh của BF và AD tạo nên các góc bằng nhau là tỷ lệ chéo với nhau [MĐ 6.14]. Khi đó, tỷ lệ của FE và ED bằng tỷ lệ của AE và EB. FE bằng AB, và ED bằng AE. Như vậy tỷ lệ của BA và AE bằng tỷ lệ của AE và EB. Và AB lớn hơn AE. Cho nên AE cũng lớn hơn EB [MĐ 5.14].

Vậy, đoạn thẳng AB đã được chia theo trung và ngoại tỷ tại điểm E, và AE là phần lớn hơn. Đó là điều cần thực hiện.

<u>Mệnh đề 31:</u> Trong các tam giác vuông, hình dựng trên cạnh chắn góc vuông bằng tổng của các hình đồng dạng, dựng theo cùng một cách, trên các cạnh bao góc vuông đó.



Gọi ABC là tam giác vuông có góc vuông là BAC. Có thể phát biểu rằng hình dựng trên cạnh BC bằng tổng của các hình đồng dạng, dựng theo cùng một cách, trên các cạnh BA và AC.

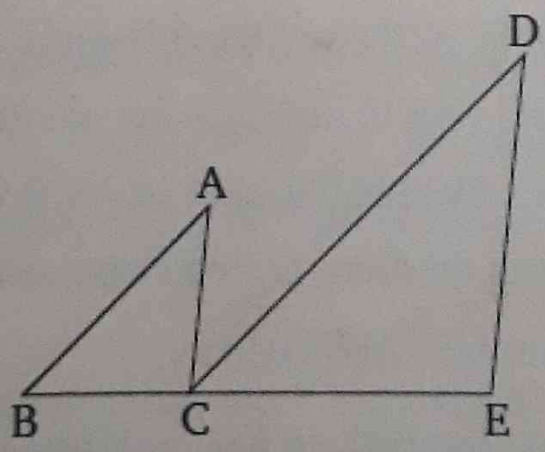
Dựng đường cao AD [MĐ 1.12].

Như vậy, vì trong tam giác vuông ABC, đường vuông góc AD được vẽ từ đỉnh góc vuông thẳng góc với cạnh đáy BC nên các tam giác ABD và ADC nằm cạnh đường cao cũng đồng dạng với tam giác tổng ABC, và đồng dạng với nhau [MĐ 6.8]. Và vì ABC đồng dạng với ABD cho nên tỷ lệ của CB và BA bằng tỷ lệ của AB và BD [MĐ 6.1]. Và khi ba đoạn thẳng là tỷ lệ, tỷ lệ giữa hình đựng trên đoạn thứ nhất và hình đồng dạng, và dựng theo cùng một cách, dựng trên cạnh thứ hai bằng tỷ lệ giữa cạnh thứ nhất và cạnh thứ ba [HQ. MĐ. 6.19]. Như vậy, tỷ lệ giữa hình đựng trên CB và hình đồng dạng, và dựng theo cùng một cách, dựng trên cạnh BA bằng tỷ lệ giữa cạnh CB và cạnh BD. Với cùng một lý do đó, tỷ lệ giữa hình đựng trên BC và hình đồng dạng, và dựng theo cùng một cách, dựng trên cạnh CA bằng tỷ lệ giữa cạnh BC và cạnh CD. Như vậy, tỷ lệ của hình dựng trên cạnh BC và tổng của các hình đồng dạng, và dựng theo cùng một cách, trên các cạnh BA và AC bằng với tỷ lệ của BC so với tổng của BD và DC [MĐ. 5.24]. Mà BC bằng AD cộng DC.

Cho nên hình dựng trên BC cũng bằng tổng của các hình đồng dạng, và dựng theo cùng một cách, dựng trên các cạnh BA và AC [MĐ 5.9].

Vậy, trong các tam giác vuông, hình dựng trên cạnh chắn góc vuông bằng tổng của các hình đồng dạng, dựng theo cùng một cách, trên các cạnh bao góc vuông đó. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Mệnh đề 32:</u> Nếu hai tam giác, có hai cạnh bên tỷ lệ với hai cạnh bên, được đặt cạnh nhau tiếp xúc tại đỉnh một góc, sao cho các cạnh bên tương ứng là song song thì các cạnh còn lại của hai tam giác sẽ thẳng hàng với nhau.



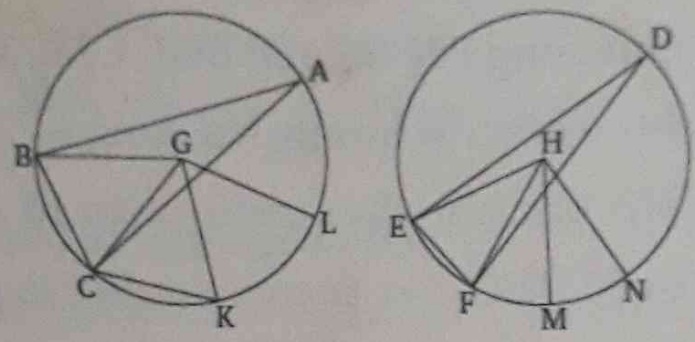
Có hai tam giác ABC và DCE có các cạnh bên BA và AC tỷ lệ với các cạnh bên DC và DE – sao cho tỷ lệ của AB và AC bằng tỷ lệ của DC và DE – và AB song song với DC, và AC song song với DE. Có thể phát biểu rằng BC thẳng hàng

với CE.

Vì AB song song với DC, và đoạn AC cắt cả hai, nên các góc chéo BAC và ACD bằng nhau [MĐ. 1.29]. Với cùng lý do đó, góc CDE cũng bằng ACD. Và vì vậy, BAC bằng CDE. Và vì các tam giác ABC và DCE là hai tam giác có góc tại A bằng góc tại D, và các cạnh bên của các góc bằng nhau này là tỷ lệ, tức là tỷ lệ của BA và AC bằng tỷ lệ của CD và DE, cho nên tam giác ABC cũng đẳng giác với DCE [MĐ. 6.6]. Vì vậy góc ABC bằng góc DCE. Và góc ACD cũng đã được chứng minh là bằng góc BAC. Như vậy góc tổng ACE bằng tổng hai góc ABC và BAC. Công ACB vào cả hai vế. Khi đó, ACE cộng ACB bằng BAC cộng ACB cộng CBA. Nhưng BAC cộng ABC cộng ACB bằng hai góc vuông [MĐ. 1.32]. Cho nên ACE cộng ACE cũng bằng hai góc vuông. Như vậy, hai đoạn thẳng BC và CE, không nằm về cùng một phía, tạo nên với đoạn AC đã biết hai góc kề ACE và ACB có tổng bằng hai góc vuông tại điểm C trên đoạn thẳng đó. Cho nên, BC thẳng hàng với CE [MĐ. 1.14].

Vậy, nếu hai tam giác, có hai cạnh bên tỷ lệ với hai cạnh bên, được đặt cạnh nhau tiếp xúc tại đỉnh một góc, sao cho các cạnh bên tương ứng là song song thì các cạnh còn lại của hai tam giác sẽ thẳng hàng với nhau. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

Mệnh đề 33: Trong các hình tròn bằng nhau, tỷ lệ giữa các góc bằng tỷ lệ giữa các độ dài cung chắn góc, dù chúng là góc ở tâm hay góc nội tiếp.



Có ABC và DEF là hai hình tròn bằng nhau, BGC và EHF là hai góc ở tâm G và H theo thứ tự đó, và Bac và EDF là các góc nội tiếp. Có thể phát biểu rằng tỷ lệ của các góc BGC và EHF, và tỷ lệ của các góc BAC và EDF bằng tỷ lệ của độ dài cung BC và EF.

Dựng một số bất kỳ các cung kề nhau, chẳng hạn CK và KL bằng cung BC, và một số bất kỳ các cung kề nhau, chẳng hạn FM và MN bằng cung EF. Nối các đoạn GK, GK, HM và HN.

Như vậy, vì các cung BC, CK và KL làm bằng nhau nên các góc BGK, CGK và KGL cũng bằng nhau [MĐ. 3.27]. Khi đó, cung BL được chia thành bao nhiêu đoạn bằng BC thì góc BGL cũng được chia thành bấy nhiêu góc bằng BGC. Và như thế, với cùng một lý do, cung NE được chia thành

bao nhiêu đoạn bằng EF thì góc NHE cũng được chia thành bấy nhiêu góc bằng EHF. Vậy nếu cung BL bằng cung EN thì góc BGL cũng bằng góc EHN [MĐ. 3.27], nếu cung BL lớn hơn cung EN thì góc BGL cũng lớn hơn góc EHN, và nếu cung BL nhỏ hơn cung EN thì góc BGL cũng nhỏ hơn góc EHN[14]. Như vậy có bốn đại lượng, hai cung BC và EF, và hai góc BGC và EHF. Các bội số có cùng nhân tử được tính ra từ cung BC và góc BGC, tức là có cung BL và góc BGL, và được tính ra từ cung EF và góc EHF, tức là có cung EN và góc EHN. Đã chứng minh được rằng nếu cung BL lớn hơn cung EN thì góc BGL cũng lớn hơn góc EHN, nếu cung BL bằng cung EN thì góc BGL cũng bằng góc EHN, nếu cung BL nhỏ hơn cung EN thì góc BGL cũng nhỏ hơn góc EHN. Như vậy tỷ lệ của góc BGC và góc EHF bằng tỷ lệ của cung BC và EF [ĐN. 5.5]. Trong thì tỷ lệ của góc BGC và góc EHF bằng tỷ lệ của góc BAC và góc EDF [MĐ. 5.15]. Cái trước gấp đôi cái sau [MĐ. 3.20].

Như vậy, tỷ lệ của góc BGC và góc EHF, và tỷ lệ của góc BAC và góc EDF bằng tỷ lệ của cung BC và cung EF.

Vậy trong các hình tròn bằng nhau, tỷ lệ giữa các góc bằng tỷ lệ giữa các độ dài cung chắn góc, dù chúng là góc ở tâm hay góc nội tiếp. Đây chính là điều cần phải chứng minh.

---

14 Đây là tổng quát hóa trực tiếp của MĐ 3.27

MỤC LỤC

Quyển 1: Cơ sở của Hình học phẳng và Đường thẳng 15

1. Định nghĩa 16
2. Các Định đề 19
3. Các Tiên đề 20
4. Các Mệnh đề..... 21

Quyển 2: Cơ sở của đại số hình học **91**

1. Định nghĩa..... 92
2. Các Mệnh đề..... 93

Quyển 3: Cơ sở hình học phẳng và hình tròn **129**

1. Định nghĩa..... 130
2. Các Mệnh đề..... 132

Quyển 4: Phép dựng các hình thẳng ở trong và xung quanh hình tròn. **201**

1. Định nghĩa..... 202
2. Các Mệnh đề..... 203

Quyển 5: Tỉ lệ thức **235**

1. Định nghĩa..... 236
2. Các Mệnh đề..... 240

Quyển 6: Hình đồng dạng **285**

1. Định nghĩa..... 286
2. Các Mệnh đề..... 287

NHÀ XUẤT BẢN TRI THỨC
53 Nguyễn Du - Hà Nội
Tel: (844) 3945 4661; Fax: (844) 3945 4660
Email: lienhe@nxbtrithuc.com.vn

Euclid
"Cơ sở của hình học"
Người dịch: **Vũ Thái Hà và Nhóm dịch**

Chịu trách nhiệm xuất bản:
CHU HẢO

Biên tập: **Phạm Tuyết Nga - Trương Đức Hùng**
Trình bày: **Mani Design**
Vẽ bìa: **Thiên Thanh**

Đối tác liên kết:
Công ty TNHH Thương mại Đầu tư Linh Lan
366/T7 Chu Văn An - Phường 12 - Quận Bình Thạnh - TP.HCM

In 2000 bản; khổ: 14,5 x 20,5 cm
Tại: Công ty TNHH MTV In Báo Nhân dân TP. Hồ Chí Minh
Địa chỉ: D20/532P ấp 4, xã Phong Phú, huyện Bình Chánh, TP.Hồ Chí Minh
Giấy đăng ký KHXB số: 2534-2015/ CXBIPH/1-35/TrT
Quyết định xuất bản số: 67/QĐLK-NXBTrT của Giám đốc NXB Trí thức ngày 19 tháng 10 năm 2015.
In xong nộp lưu chiểu Quý IV năm 2015.

Tác giả

EUCLID

"Danh tiếng lừng lẫy của Euclid nằm ở bộ Cơ sở của hình học, trong đó ông viết mười ba quyển và đã để lại một ảnh hưởng to lớn lên tư duy của con người mạnh mẽ hơn bất cứ tác phẩm nào khác ngoại trừ Kinh thánh. Bởi lý do đó, ông được biết đến trong thời cổ đại như là 'Người viết nên Cơ sở của hình học' và đôi khi chỉ đơn giản là "Nhà hình học".

Theo một nghĩa nào đó, *Cơ sở của hình học* là quyển sách thuần tuý toán học đầu tiên của nhân loại và là tờ giấy khai sinh ra toán học như một bộ môn độc lập, tuy vẫn còn là một bộ phận của triết học. Cách Euclid xây dựng một hệ thống kiến thức cao vút dựa trên số ít tiên đề nền và lấy luật logic làm chất gắn kết, đã là hình mẫu cho sự phát triển của toán học cho đến ngày hôm nay.

- GS. Ngô Bảo Châu

NTS